MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Sezione Romana

CASUALITA' o LEGGE MATEMATICA ?

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

Antonio Salmeri

QUESTA CONVERSAZIONE
SARA' SVOLTA IN DUE PARTI:
(Strettamente legate fra loro)

1) Casualità' o legge matematica ?

2) Il 18 marzo 1938 si riunisce presso l'Istituto tecnico Vittorio Emanuele II di Genova …

Il fatto che una successione di numeri interi consecutivi elevati al quadrato possa scomporsi in due parti nelle quali la somma dei primi termini è uguale alla somma dei secondi membri, sorprende alquanto.

Ma se poi si scopre che vale anche la relazione:

$$\mathbf{55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2}$$

è lecito chiedersi se trattasi ancora di casualità, oppure esiste una legge che genera queste sequenze.

* Ne esistono altre?

* Se esistono, come si costruiscono?

* Il numero dei termini del primo membro deve sempre superare di uno i termini del secondo membro?

Cercheremo di rispondere a queste domande con gradualità e iniziamo col fare alcune semplici considerazioni.
Le ipotesi di partenza sono queste:
I termini di questa successione sono quadrati di numeri interi consecutivi, pertanto il numero di termini nei due membri non può essere uguale, né il numero dei termini del secondo membro può essere maggiore del numero dei termini del primo membro.
Quindi possiamo iniziare esaminando il caso in cui il numero dei termini del primo membro supera di uno i termini del secondo membro, pertanto il numero totale dei termini è dispari.

Cominciamo da m = (n + 1) + n = 3, ovvero con n = 1 e quindi il primo termine è 1.

Sulla sinistra scriviamo fra parentesi la somma dei quadrati dei primi n+1 termini della successione ed a destra la somma dei rimanenti n termini.

Per m = 3 si ha:

$$(5 =)\ 1^2 + 2^2 < 3^2\ (= 9)$$
$$(13 =)\ 2^2 + 3^2 < 4^2\ (= 16)$$
$$\mathbf{(25 =)\ 3^2 + 4^2 = 5^2\ (= 25)}$$
$$(41 =)\ 4^2 + 5^2 > 6^2\ (= 36)$$
$$(61 =)\ 5^2 + 6^2 > 7^2\ (= 49)$$

Quindi per m = 3 si ha eguaglianza fra i due membri per n = 1 ed il primo termine della progressione è 3.

Per m = 5 , si ha:

$$(14 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 < 4^2 + 5^2\ (= 41)$$

. . . . . .

$$(302 =)\ 9^2 + 10^2 + 11^2 < 12^2 + 13^2\ (= 313)$$

$$\mathbf{(365 =)\ 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2\ (= 365)}$$

$$(434 =)\ 11^2 + 12^2 + 13^2 > 14^2 + 15^2\ (= 421)$$

$$(434 =)\ 12^2 + 13^2 + 14^2 > 15^2 + 16^2\ (= 481)$$

Quindi per m = 5 si ha eguaglianza fra i due membri per n = 3 ed il primo termine della progressione è **10**.

Per m = 7 , si ha:

$$(30 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 < 5^2 + 6^2 + 7^2\ (= 110)$$

. . . .

$$(1854 =)\ 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 < 24^2 + 25^2 + 26^2\ (= 1877)$$

$$\mathbf{(2030 =)\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2\ (= 2030)}$$

$$(2214 =)\ 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 > 26^2 + 27^2 + 28^2\ (= 2189)$$

Quindi per m = 7 si ha uguaglianza fra i due membri per n = 4 ed il primo termine della progressione è **21**.

Per m = 9, si ha:

$$\mathbf{36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 \quad (= 7230)}$$

con n = 3 ed il primo termine della progressione è 36.

Per m = 11, si ha:

$$\mathbf{55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2}$$
$$\mathbf{(= 19855)}$$

con n = 4 ed il primo termine della progressione è **55**.

Ma ovviamente questo procedimento non dimostra l'esistenza o meno di infinite *n-ple* che soddisfano la relazione di uguaglianza, e diventa estremamente laborioso nel caso si voglia conoscere a mezzo tentativi quale progressione, ad esempio di 35 termini o anche più, soddisfa la condizione richiesta.

Ciò equivale a ricercare per quali valori di *n* l'equazione seguente:

$$(1) \quad x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2$$

ammette radici intere e positive.

Ora, sviluppiamo i quadrati, e riducendo si perviene all'equazione

$$x^2 – 2n^2x – n^2(2n + 1) = 0.$$

la quale ammette, qualunque sia *n*, le radici: ***n(2n + 1)*** e ***–n.*** La prima soluzione prova che la surriferita serie può continuarsi indefinitamente. Facendo invece nella (1) $x = - n$ si cade nell'identità

$$(-n)^2 + (-n + 1)^2 + \dots + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 .$$

Applicando il valore *n(2n + 1),* che possiamo scrivere anche *n·m*, dove:

- n sono i termini del secondo membro
- m, ovvero (n +1) + n = 2n + 1, sono i termini totali della progressione

per n = 1 si ha il numero 3 che è il primo dei 2 + 1 = 3 termini

per n = 2 si ha il numero 10 che è il primo dei 3 + 2 = 5 termini

per n = 3 si ha il numero 21 che è il primo dei 4 + 3 = 7 termini

per n = 4 si ha il numero 36 che è il primo dei 5 + 4 = 9 termini

per n = 5 si ha il numero 55 che è il primo dei 6 + 5 = 11 termini

Adesso possiamo trovare, per via analitica, anche qual è la successione di 35, o anche più, termini!

Se m = 35, allora n = 17 ed il primo termine è 595.

Si ha la seguente uguaglianza:

$$(\mathbf{6\ 556\ 305} =) \ \mathbf{595^2 + \ldots + 612^2 = 613^2 + \ldots + 629^2} \ (= \mathbf{6\ 556\ 305})$$

Sarebbe stato abbastanza laborioso trovarlo a tentativi.
Passiamo a calcolare il valore *S(n)* della somma comune ai due membri in funzione di *n*. Prendiamo in esame gli *n* termini del secondo membro della (1).
Si ha successivamente, tenendo presente che

$$x = n(2n + 1) \quad \text{e quindi} \quad x + n = 2n(n + 1):$$

$$S(n) = [2n(n+1) + 1]^2 + [2n(n+1) + 2]^2 + [2n(n+1) + 3]^2 + \ldots + [2n(n+1) + n]^2 =$$

$$= n\,4n^2 (n+1)^2 + 4n(n+1)(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$

$$= 4n^2 (n+1)^2 + 2n^2 (n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)/6 =$$

$$= n(n+1)(24n^3 + 36n^2 + 14n + 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6,$$

$$\textbf{(2)} \qquad \mathbf{S(n) = n(n + 1)(2n + 1)(12n^2 + 12n + 1)/6}$$

Quindi con la relazione (2) si possono calcolare i valori già trovati sperimentalmente:

$S(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 / 6 = \mathbf{25}$

$S(2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1) / 6 = \mathbf{365}$

$S(3) = \mathbf{2030}$;

$S(4) = \mathbf{7230}$;

$S(5) = \mathbf{19\ 855}$;

. . . . .

$S(17) = \mathbf{6\ 556\ 305}$

Abbiamo quindi visto che la relazione mostrata nel titolo non è casuale ma è conseguente a un preciso procedimento matematico.

La stessa cosa non può dirsi per le relazioni (presenti in *Matematica dilettevole e curiosa* di Italo Ghersi) qui di seguito riportate:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 10^2 + 11^2,$$

essa non deriva da procedimento matematico, ma è casuale, così come

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 14^2\ ,$$

In entrambe le successioni i termini non sono consecutivi.

Desideriamo vedere se possiamo estendere il procedimento trovato alle successioni aventi un numero dispari di termini a quelle aventi un numero pari di termini, ovvero a quelle in cui il primo gruppo ha due termini più del secondo.

Seguiamo lo stesso procedimento iniziando con la successione avente come primo termine il numero 1 e come numero di termini totali m = 4:

$$(14 =)\ 1^2 + 2^2 + 3^2 < 4^2\ (= 16)$$

$$(29 =)\ 2^2 + 3^2 + 4^2 > 5^2\ (= 25)$$

$$(50 =)\ 3^2 + 4^2 + 5^2 > 6^2\ (= 36)$$

Quindi per n = 1 ed m = 1 + 3 = 4 non troviamo nessuna uguaglianza per interi consecutivi, ma se modifichiamo l'ipotesi iniziale ed al posto di interi consecutivi cerchiamo più in generale "*numeri che differiscono di una unità*", forse possiamo trovare una uguaglianza dove il primo numero è compreso fra 1 e 2.

Cercare questa successione implica trovare la soluzione di questa equazione:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$$

Sviluppando si perviene all'equazione $x^2 = 2$ e quindi $x = \sqrt{2}$, che è compreso fra 1 e 2.

La successione è pertanto la seguente:

$(11 + 6\sqrt{2} =)$ $\mathbf{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 = (\sqrt{2} + 3)^2}$ $(= 11 + 6\sqrt{2})$

Esaminiamo il caso di m = 6, l'equazione da risolvere è la seguente:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2 + (x + 5)^2$$

Sviluppando si perviene all'equazione:

$$2x^2 – 6x – 27 = 0 \quad \text{e quindi} \quad x = (3 + \sqrt{63})/2 \approx 5,4686\ldots$$

Si può continuare così indefinitivamente.

* * * * *

Passiamo ora alla seconda parte

Atti della Società Italiana « Mathesis »

Adunanza del 18 marzo 1938 - XVI

In un'aula g. c. del R. Istituto Tecnico Vittorio Emanuele II, la Sezione si riunisce alle ore 17 per lo svolgimento del seguente o. d. g.:

Proposta di un concorso.
Varie.

Sono presenti il Presidente prof. Loria e i Soci proff. Bonistalli, Burnengo, Civinini, Lamberti, Mulè, Nannei, Pretti, Quarleri, Ricci, Segre, Serra, Severini, Traversa, Zicavo.

Viene letto ed approvato il verbale della seduta precedente.

Iniziando lo svolgimento dell'ordine del giorno, il Presidente richiama l'attenzione dei convenuti su quanto egli espose nella comunicazione « Quo vàdimus? » fatta al Congresso internazionale dei matematici che ebbe luogo a Bologna nel 1928. In essa egli, fatto un rapido quadro dell'enorme produzione matematica attuale, segnalò la difficoltà in cui trovansi gli studiosi di conoscere quanto viene pubblicato in quel campo ed il conseguente pericolo di compiere come nuove, ricerche già condotte a termine e di trovarsi arrestati per l'ignoranza di risultati già conseguiti....

A questo punto il Presidente, osservando che l'ordine del giorno della seduta e l'ora lo consentono, richiama l'attenzione dei convenuti sopra le seguenti identità numeriche:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2,\quad 21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2,$$

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2,$$

ottenute quasi sperimentalmente, di recente, da un collaboratore degli *Scripta mathematica*, estendendo la nota relazione $3^2+4^2=5^2$. L'oratore si è chiesto se la serie riferita non ammetta continuazione ed ha fatto osservare che tale domanda equivale a ricercare per quali valori di n l'equazione seguente:

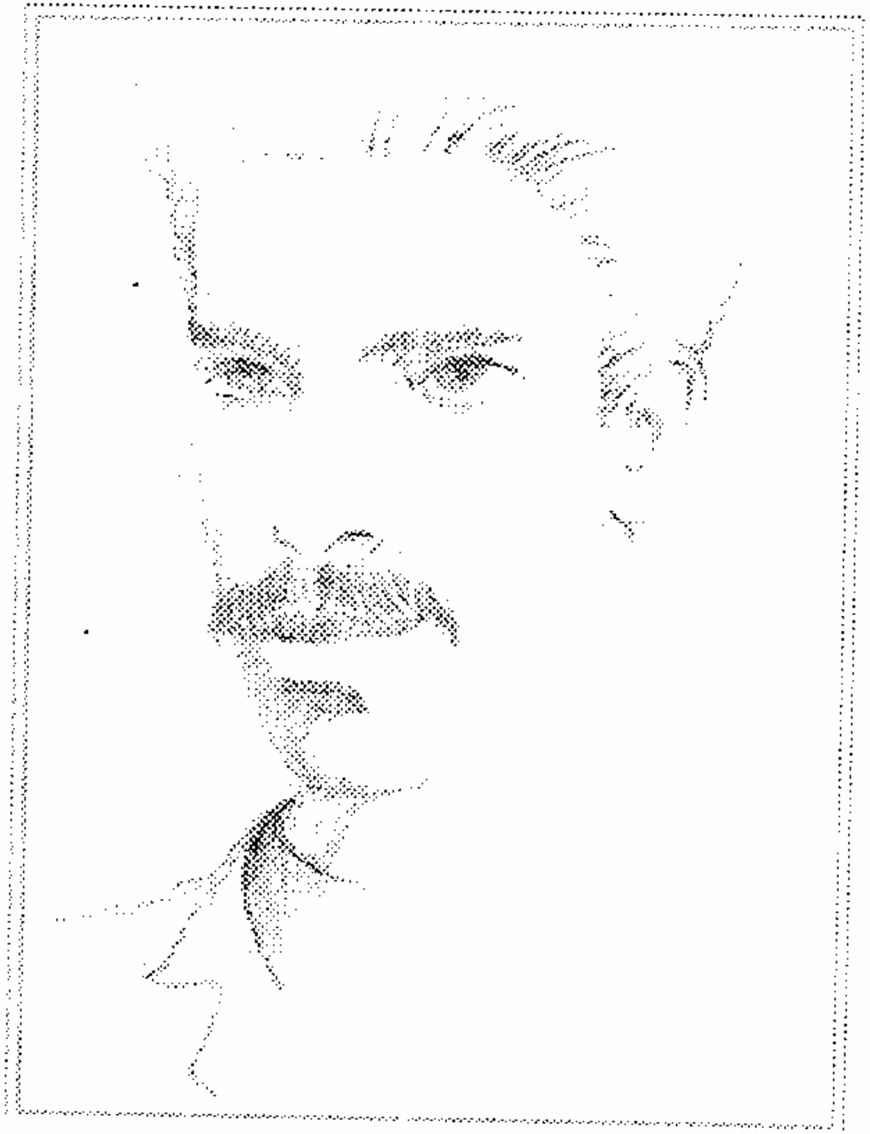
$$(1)\quad x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2$$

ammetta radici intere e positive.

Gino Benedetto Loria (Mantova, 19 maggio 1862 – Genova, 30 gennaio 1954) è stato un matematico italiano.

Si laureò nel 1883 all'Università di Torino. Dal 1886 insegnò Algebra e Geometria analitica all'Università di Genova. Nel 1935, dovette abbandonare l'insegnamento a seguito della promulgazione delle Leggi razziali e si rifugiò nelle Valli Valdesi. I suoi studi matematici rientrano nell'ambito della Geometria: strofoide, trasformazioni razionali, funzioni ellittiche.[1] Tuttavia è principalmente ricordato per il suo contributo allo sviluppo degli studi di storia della matematica in Italia, e molti dei suoi libri sono stati tradotti in altre lingue soprattutto in tedesco. Nel 1929 divenne per pochi giorni presidente della Accademia Internazionale di Storia delle Scienze.[2]

Un asteroide (27056 Ginoloria) porta il suo nome.



Ritratto di Gino Loria a matita su carta

ANNO XXXVI DALLA FONDAZIONE   Fasc. II - Marzo 1940 - XVIII   ANNO I DELLA QUARTA SERIE

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

GIORNALE SCIENTIFICO DIDATTICO PER L'INCREMENTO DEGLI STUDI MATEMATICI NELLE SCUOLE MEDIE

CON UNA SEZIONE STORICO-BIBLIOGRAFICA

Fondato nel 1902 e diretto fino al 1939 dal prof. **ALBERTO CONTI**

Continuato dai proff. **ENRICO NANNEI** ed **ENRICO GRASSI**

Premiato dalla R. Accademia d'Italia nel 1931 e nel 1933

.... Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola

FRATTINI.

PERIODICO BIMESTRALE

DIREZIONE E AMMINISTRAZIONE:

GENOVA - Presso l'Istituto "G. Leopardi" - Via XX Settembre, 31

Sull'estensione della relazione pitagorica $3^2+4^2=5^2$

L'illustre prof. Loria, in una comunicazione da lui fatta nel 1933 alla sezione ligure di *Mathesis* e pubblicata poi negli atti di questa Associazione a pag. 33, dimostrò che, dato un intero positivo n qualsiasi, esistono $2n+1$ interi consecutivi tali che la somma dei quadrati dei primi $n+1$ numeri eguaglia quella dei quadrati degli n rimanenti e che il medio, ossia l'$(n+1)^{mo}$, di tali numeri è $2n(n+1)$, dando così un'elegante estensione alla classica relazione pitagorica $3^2+4^2=5^2$; ma egli non disse quale era il valore comune delle due somme. Orbene io mi permetto di colmare qui tale lacuna coll'effettuare una delle due somme, ad esempio quella dei quadrati degli ultimi n numeri: indicandola con S risulta

$$S=[2n(n+1)+1]^2+[2n(n+1)+2]^2+[2n(n+1)+3]^2+\dots+$$
$$+[2n(n+1)+n]^2=n\cdot 4n^2(n+1)^2+4n(n+1)\cdot(1+2+3+\dots+n)+$$
$$+(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=4n^3(n+1)^2+2n^2(n+1)^2+$$
$$+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(24n^3+36n^2+14n+1)=$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n+1).$$

Napoli, 27 gennaio 1940-XVIII

Prof. Enrico Ducci

Ma di cosa si parlò nella prima parte dell’Adunanza della Sezione Ligure Mathesis del 18 marzo 1938?

Riprendiamo il discorso da dove lo avevamo lasciato. Anche se il contenuto della prima parte di quanto discusso esula dall’oggetto della conversazione, ritengo che ha un grande valore storico, soprattutto perché completamente sconosciuto.

... l'ignoranza di risultati già conseguiti. A fronteggiare tali eventualità egli ebbe a suggerire ai matematici di non trascurare le esposizioni metodiche complete di quelle teorie ormai giunte ad un soddisfacente grado di maturità. Per la geometria tale condizione può ritenersi raggiunta da tre argomenti: Curve piane speciali, Curve sghembe speciali, Superficie speciali. Riguardo ai due primi, trattazioni dell'indicato tipo esistono in opere da qualche anno già date alle stampe. L'oratore ritiene che una trattazione del terzo riuscirebbe della massima utilità ed egli stesso vi si sarebbe accinto ove le sue condizioni, attestate dai registri dello stato civile non consentissero di nutrire la speranza di giungere al termine da tale lavoro. In tale stato di cose egli propone che la Sezione suggerisca ad altri tale tema di studio, osservando che chi si accingerà ad accogliere siffatto suggerimento troverà largo aiuto nella sua opera *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* ed in articoli (specialmente del prof. Berzolari) della grande

Enciclopedia tedesca. Precisando il suo concetto, propone che la Sezione, approffitando del modesto capitale di cui dispone, indica un pubblico concorso sull'argomento. E poichè tale idea, comunicata al Presidente della « Mathesis » e ad alcuni colleghi ottenne già la loro approvazione, egli stesso redasse uno schema di programma di cui dà lettura e sul quale apre la discussione.

Il prof. Severini, mentre approva l'idea del Presidente e lo schema di programma, vorrebbe che il concorso fosse intitolato al nome del prof. Loria, che da tanti anni dà opera utilissima alla Sezione, ed esprime poi il voto che egli aiuti ed eventualmente collabori alla progettata opera.

Il prof. Nannei si associa a tali vedute.

Il presidente ringrazia gli oratori e non si oppone alle proposte modificazioni, non senza osservare che la Sezione gli diede già tante prove di stima ed affetto, che una nuova gli sembra superflua.

Quanto alla sua partecipazione della progettata impresa, chi vi si accingerà può fin d'ora fare assegnamento sopra il suo aiuto.

Chiusa la discussione viene ad unanimità approvato il seguente schema di bando di Concorso che dalla presidenza della « Mathesis » sarà sottoposto al benestare Ministeriale.

CONCORSO AL PREMIO G. LORIA

La Sezione Ligure della Società di Matematica e Fisica « Mathesis », in pieno accordo con la Presidenza di questa Società, apre un Concorso a premio intitolato al suo attuale Presidente per un'opera sul seguente argomento:

Superficie speciali algebriche e trascendenti – Teoria e storia.

Dai concorrenti si richiede che per ciascuna superficie vengano indicate le definizioni e le origini, stabilite possibilmente le equazioni e assegnate le più cospicue proprietà, il tutto accompagnato da esatte indicazioni bibliografiche, le quali possano servire di guida per ulteriori studi.

All'autore dell'opera premiata, la Sezione ligure della « Mathesis », cederà tutti i propri diritti verso la Casa CEDAM di Padova (circa L. 2500-3000) sulla vendita dell'opera del prof. LORIA: *Scritti, Conferenze, Discorsi, sulla Storia delle matematiche*, avvertendo che la parte di detta somma già riscossa (oggi L. 577,50) e depositata in un libretto al portatore presso la Sede di Genova del Credito Italiano, verrà subito consegnata al vincitore del Concorso. Questi conserverà la proprietà letteraria del suo lavoro, ma sarà tenuto a pubblicarlo per le stampe al più presto possibile.

Il Concorso è riservato ad autori italiani. I lavori dei concorrenti dovranno essere presentati in due coppie, possibilmente dattilografate, entro le ore 18 del giorno 31 dicembre 1940, accompagnati da una busta suggellata, contrassegnata con un motto riprodotto sull'originale, contenente il nome e l'indirizzo dell'autore, il tutto diretto al Presidente della Sezione Ligure della « Mathesis », presso la Segreteria della R. Università di Genova. I lavori non premiati potranno venire ritirati da persone che dimostreranno averne diritto.

Il giudizio inappellabile verrà pronunciato da una Commissione costituita dal Presidente della « Mathesis », dal Presidente della Sezione Ligure della stessa Società, dal Preside della Facoltà di Scienze della R. Università di Genova, e da altre persone designate dai tre membri d'ufficio.

Firenze-Genova, Marzo 1938-XVI.

Il Presidente dell' « Mathesis »
G. SANSONE

Il Presidente della Sez. Lig. dell' « Mathesis »
G. LORIA.

(Il Concorso è stato approvato con lett. Min. n. 7153 dell' 11 giugno 1938-XVI).

Chi è stato il vincitore del Premio Gino Loria?
Le ricerche fatte in proposito non hanno fornito nessuna risposta. Eppure si trattava di un Premio voluto dalla Presidenza Nazionale ed approvato dal Ministero.
Per rispondere a questa domanda è necessario leggere attentamente le date:

- **18 marzo 1938**: A settembre vengono promulgate le leggi razziali e Gino Loria, di religione ebraica, così come moltissimi altri ebrei dovette abbandonare ogni incarico
- **31 dicembre 1940**: A giugno l'Italia era entrata in guerra e certo nessuno era interessato a partecipare ad un premio intitolato ad un "Ebreo".

Gino Loria muore il 30 gennaio 1954 all'età di 92 anni. Nell'ottobre del 1954 il prof. Giovanni Sansone, che era stato presidente Nazionale della Mathesis dal 1937 al 1941, in una riunione dell'Ufficio di Presidenza dell'Unione Matematica Italiana nella quale era Presidente dal 1952 istituisce nuovamente il "**Premio Gino Loria**" da conferirsi mediante concorso per titoli ad un laureato del precedente triennio che abbia conseguito la laurea con una tesi originale in matematica,

oppure in matematica e fisica, oppure in fisica presso l'università di Genova con una tesi .

Riunione dell'Ufficio di Presidenza dell'U.M.I. del 2 ottobre 1954. — Il 2 ottobre alle ore 10.30 si è riunito l'Ufficio di Presidenza dell'U.M.I. presso l'Istituto Matematico dell'Università di Bologna.

Sono presenti i proff.: G. Sansone, A. Terracini, M. Villa, D. Graffi, G. Cimmino. Presiede il prof. G. Sansone.

L'ordine del giorno è il seguente:

Istituzione del «Premio Gino Loria». — Con la rendita del capitale di L. 600.000, raccolte mediante apposita sottoscrizione dal Comitato per le onoranze al prof. Gino Loria, verrà istituito un premio di studio biennale intitolato «Premio Gino Loria», da conferirsi mediante concorso per titoli ad un laureato del precedente triennio, rispetto alla data del bando di concorso, che abbia conseguito la laurea in matematica, oppure in matematica e fisica, oppure in fisica presso l'Università di Genova, discutendo una dissertazione di laurea originale su argomento matematico, secondo le modalità che saranno fissate da apposito regolamento.