Seminari Mathesis Romana

ITIS "Galileo Galilei" - Via Conte Verde 51 - 00185

10 maggio 2012

La spiegazione in matematica

Carlo Cellucci

carlo.cellucci@uniroma1.it

- Si ritiene comunemente che uno degli scopi principali della scienza naturale sia quello di spiegare fatti naturali.

Popper

- "Un problema di scienza pura consiste" sempre nel "**trovare una spiegazione**, la spiegazione di un fatto o un fenomeno o una regolarità notevole o un'eccezione notevole a una regola".

- Invece, molti ritengono che **non sia possibile una spiegazione dei fatti matematici**, in particolare che non esista alcuna distinzione oggettiva tra dimostrazioni esplicative e dimostrazioni non esplicative.

Resnik e Kushner

- "Avendo osservato che molte dimostrazioni sono perfettamente soddisfacenti come dimostrazioni", ma "lasciano senza risposta molte delle nostre domande-perché", noi "tendiamo a riunire queste domande-perché senza risposta sotto l'unica espressione 'Perché questo è vero?'".

- "E così ne traiamo l'idea errata che esista una distinzione oggettiva tra dimostrazioni esplicative e dimostrazioni non esplicative".

- Ma "la nozione di dimostrazione esplicativa non è praticabile".

- E difatti "i matematici raramente descrivono se stessi come occupati a spiegare".

- Ma questo contrasta con l'opinione di molti matematici.

Atiyah

- "Ricordo un teorema che dimostrai, e che però realmente non riuscivo a vedere perché era vero".

- Ma "cinque o sei anni dopo capii perché doveva essere vero".

- Allora, usando "tecniche molto differenti, ottenni una dimostrazione completamente differente" del teorema, che "chiarì completamente perché doveva essere vero".

Auslander

- Mentre "si suppone che una dimostrazione spieghi un risultato", si "deve ammettere che non tutte le dimostrazioni soddisfano questo standard".

- Questo ha "spesso portato a sviluppare nuove dimostrazioni più comprensibili".

Due sensi di spiegazione

1) Esistono **spiegazioni di fatti matematici**?

2) Esistono **spiegazioni di fatti non matematici – ** fisici, biologici, psicologici, economici, ecc. **– mediante la matematica**?

- Si tratta di due sensi differenti di 'spiegazione'.

- La spiegazione di fatti matematici è spiegazione **nella** matematica.

- La spiegazione di fatti non matematici è spiegazione **con la** matematica.

Argomento del seminario

- Esistono spiegazioni **nella** matematica?

- In particolare, esiste una **distinzione oggettiva** tra **dimostrazioni esplicative** e **dimostrazioni non esplicative**?

- Alcuni ritengono che dare spiegazioni in matematica non significhi dare dimostrazioni di un certo tipo.

Sierpinska

- "La ricerca di una spiegazione in matematica **non può essere la ricerca di una dimostrazione**, ma può essere un tentativo di trovare una ragione della scelta degli assiomi, delle definizioni, dei metodi di costruzione di una teoria".

- Come vedremo, questa opinione si basa sull'assunzione che 'dimostrazione' significhi 'dimostrazione assiomatica', quindi sia solo "un mezzo per accertare la verità di un teorema".

- Dunque il suo scopo sia quello di dare una giustificazione di un teorema.

- Ma questo è solo uno dei concetti di dimostrazione.

- Come vedremo, in aggiunta vi è un altro concetto di dimostrazione, secondo cui una dimostrazione è un mezzo per scoprire soluzioni di problemi.

- Rispetto a questo concetto di dimostrazione, l'assunzione che 'dimostrazione' sia sinonimo di 'dimostrazione assiomatica' è ingiustificata.

La concezione deduttiva della spiegazione

- Una considerevole parte della riflessione sulla scienza dell'ultimo secolo ha riguardato la natura della spiegazione nella scienza naturale.

- In tale periodo, la concezione più diffusa è stata la **concezione deduttiva**.

- Essa fu introdotta da **Popper** (1934) con il nome di **spiegazione causale**, ma spesso viene attribuita a **Hempel** e **Oppenheim** (1948).

Popper

- "Dare una spiegazione causale di un evento significa dedurre una proposizione che lo descrive, usando come premesse della deduzione una o più **leggi universali**, e certe proposizioni singolari, le **condizioni iniziali**".

- Le **leggi universali** hanno "il carattere di **leggi di natura**".

- "Le **condizioni iniziali** descrivono quella che si dice di solito la **causa** dell'evento in questione".

Esempio

- Supponiamo che un pezzo di filo, di forza tensile di **1 libbra**, si spezzi. **Spiegare perché si è spezzato**.

- **Spiegazione**. Quando un pezzo di filo, di forza tensile di **1 libbra**, viene caricato con un peso maggiore di quella forza tensile, esso si spezza (**legge universale**), e il filo è stato caricato con un peso di **2 libbre** (**condizione iniziale**).

- Da queste premesse si può dedurre che il filo si spezza. Perciò la legge universale e la condizione iniziale spiegano perché il filo si è spezzato.

- Allora, "che un peso di **2 libbre** sia stato messo" sul filo "è stata la 'causa' del suo 'spezzarsi' ".

- La spiegazione deduttiva è stata **estesa anche alla matematica**.

Nagel

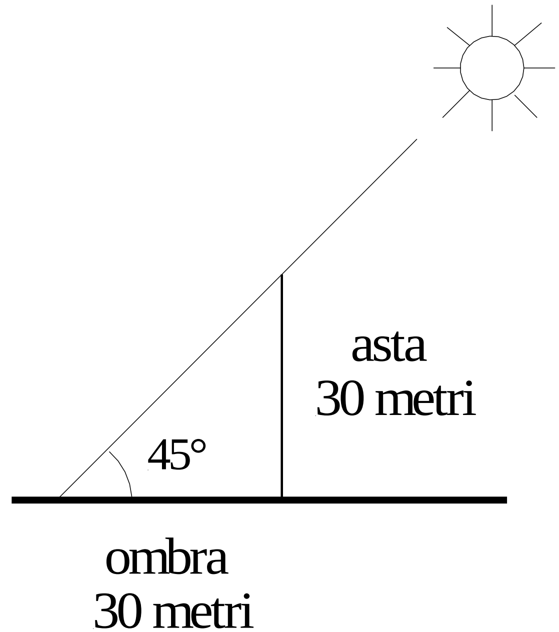
- Una **spiegazione** di una verità universale, come “la somma di un numero qualsiasi di numeri dispari consecutivi a partire da 1 è sempre un quadrato perfetto”, è “una **dimostrazione** che stabilisce" la "verità universale," purché "i passi della dimostrazione siano conformi ai requisiti formali di una dimostrazione logica".

- Nell'esempio in questione, non vi sono condizioni iniziali, e le leggi universali sono "' postulati dell'aritmetica".

- La concezione deduttiva, però, è inadeguata come si vede da un semplice esempio, attribuito a **Bromberger**.

Bromberger

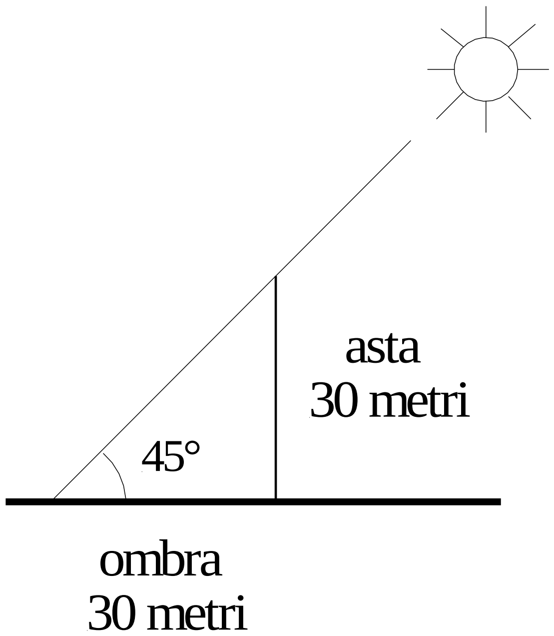
- Un'asta fa un'ombra di 30 metri sul terreno. Spiegare perché l'ombra è lunga 30 metri.



- **Spiegazione**. La luce viaggia in linea retta, e valgono le leggi della geometria (**leggi universali**), e l'angolo di elevazione del sole è 45 e l'asta è alta 30 metri (**condizioni iniziali**).

- Da queste premesse si può dedurre che l'ombra è lunga 30 metri. Dunque le leggi universali e le condizioni iniziali spiegano perché l'ombra è lunga 30 metri.

- Un'asta è lunga 30 metri. Spiegare perché l'asta è lunga 30 metri.



- **Spiegazione**. La luce viaggia in linea retta, e valgono le leggi della geometria (**leggi universal**i), e l'angolo di elevazione del sole è 45 e l'ombra è lunga 30 metri (**condizioni iniziali**).
- Da queste premesse si può dedurre che l'asta è lunga 30 metri. Dunque le leggi universali e le condizioni iniziali spiegano perché l'asta è lunga 30 metri.

- Ma sembra piuttosto strano considerare il fatto che l'asta faccia un'ombra di 30 metri come una spiegazione del suo essere alta 30 metri.

- La reale spiegazione potrebbe esse invece, ad esempio, che l'asta è stata fatta alta 30 metri per poter essere visibile in tutta l'area.

- Questo non ha nulla a che fare con la lunghezza della sua ombra.

- Dall'esempio è chiaro perché la concezione deduttiva è inadeguata. Essa fa contare come spiegazione qualcosa che ovviamente non lo è.

- Che la concezione deduttiva sia inadeguata era stato già messo in luce da **Aristotele**.

Aristotele

- "**Conoscere che** è diverso da **conoscere perché**".

- Ora, "conoscere una cosa è" è "averne una dimostrazione".

- "Una **dimostrazione che**" è diversa da "una **dimostrazione perché**".

- Nella prima "non viene detta la causa" della cosa dimostrata. Invece, la causa viene detta nella seconda.

(A)

Una cosa non scintilla se e solo se è vicina

I pianeti non scintillano

I pianeti sono vicini

(B)

Una cosa non scintilla se e solo se è vicina

I pianeti sono vicini

I pianeti non scintillano

- La dimostrazione **(A)** non è esplicativa, mentre **(B)** è esplicativa.
- Infatti, "non è perché i pianeti non scintillano che essi sono vicini, al contrario, è perché i pianeti sono vicini che essi non scintillano".

- L'esempio di **Aristotele** mostra che la relazione tra il fatto da spiegare e le condizioni iniziali è asimmetrica.
- Perciò la concezione deduttiva della spiegazione è inadeguata.
- L'esempio di **Aristotele** mostra anche che vi è una distinzione oggettiva tra le dimostrazioni esplicative e le dimostrazioni non esplicative.
- Solo le prime mostrano la causa della cosa dimostrata.

Cartesio

- Sebbene il **metodo assiomatico** o **sintesi** "dimostri chiaramente la conclusione", tale metodo non soddisfa "né appaga le menti di coloro che sono desiderosi di sapere, perché non mostra come la cosa in questione è stata scoperta".

- Viceversa, il **metodo analitico** o "**analisi** mostra la vera via attraverso la quale una cosa è stata scoperta metodicamente".

- In tale metodo, "le cause sono dimostrate dagli effetti", e "le cause da cui io deduco" gli effetti "servono **non tanto a dimostrarli quanto a spiegarli**".

- Perciò "vi è una grande differenza tra" il mero "**dimostrare** e **spiegare**".

- Dunque, per **Cartesio**, le dimostrazioni **esplicative** sono quelle che mostrano come è stata scoperta la cosa, e si basano sul **metodo analitico**.
- Le dimostrazioni **non esplicative** sono quelle che non mostrano come è stata scoperta la cosa, e si basano sul **metodo assiomatico**.

Metodo assiomatico

- Per dimostrare una proposizione, si parte da premesse primitive date, che si suppongono vere in un qualche senso di 'vero' (per es., coerenti tra loro), e si deduce da essa la proposizione.

Nozione assiomatica di dimostrazione

- Una dimostrazione consiste in una deduzione di una proposizione da premesse primitive date, che si suppongono vere in un qualche senso di 'vero' .

- Scopo di una dimostrazione è dare una **giustificazione** di una proposizione.

- Dunque una dimostrazione ha una funzione di **convalida**, è volta a stabilire la **certezza** della conclusione.

Metodo analitico

- Per risolvere un problema, si cerca un'ipotesi che sia una condizione sufficiente per la soluzione del problema.
- L'ipotesi si ottiene dal problema, ed eventualmente da altri dati, mediante qualche inferenza **non deduttiva**, e dev'essere **plausibile**, cioè compatibile con i dati esistenti.
- Ma l'ipotesi, a sua volta, è un problema da risolvere, e viene risolto nello stesso modo, cioè, cercando una nuova ipotesi che sia una condizione sufficiente per risolvere il problema posto dall'ipotesi precedente.
- La nuova ipotesi si ottiene dall'ipotesi precedente, ed eventualmente da altri dati, mediante qualche inferenza **non-deduttiva**, e dev'essere **plausibile**.
- E così via. Perciò la soluzione di un problema è un processo **potenzialmente infinito**.

Nozione analitica dimostrazione

- Una dimostrazione consiste innanzitutto in una **derivazione non deduttiva** di un'ipotesi da un problema, ed eventualmente da altri dati, dove l'ipotesi è una condizione sufficiente per la soluzione del problema ed è plausibile; poi, in una **derivazione non deduttiva** di una nuova ipotesi dall'ipotesi precedente, considerata a sua volta come un problema; e così via.

- Scopo di una dimostrazione è la **scoperta** di ipotesi che siano condizioni sufficienti per la soluzione di un problema e siano plausibili.

- Dunque una dimostrazione ha una funzione **euristica**.

MATHESIS

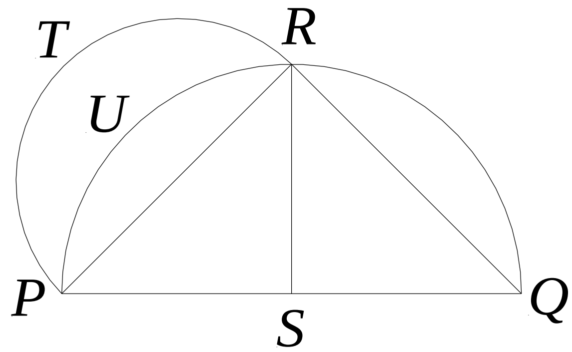
Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Sezione Romana

Ippocrate di Chio

Quadratura di certe lunule

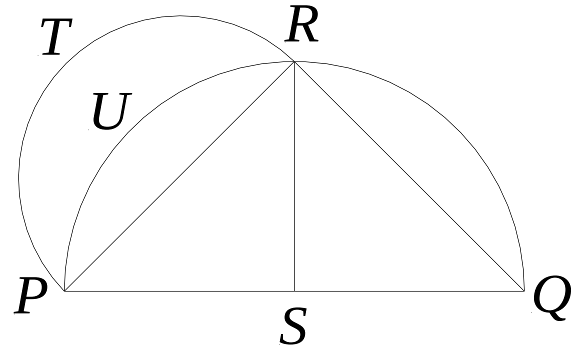
- **Problema:** Mostrare che,



se *PQR* è un triangolo rettangolo isoscele e

PRQ, *PTR* sono semicerchi su *PQ*, *PR*, rispettivamente,

allora la **lunula** *PTRU* è **eguale al triangolo rettangolo isoscele** *PRS*.



- **Ipotesi: I cerchi stanno tra loro come i quadrati sui loro diametri**.
- Per il teor. di **Pitagora**, il quadrato sull'ipotenusa *PQ* è il doppio del quadrato sul cateto *PR*.
- Perciò, per l'**Ipotesi**, il semicerchio sull'ipotenusa *PQ*, cioè *PRQ*, è il doppio del semicerchio sul cateto *PR*, cioè *PTR*.
- Quindi il quarto di cerchio *PRS* è eguale al semicerchio *PTR*.
- Sottraendo lo stesso segmento circolare, *PUR*, dal quarto di cerchio PRS e dal semicerchio PTR, si ottengono, rispettivamente, la lunula PTRU e il triangolo PRS. Perciò la lunula è eguale al triangolo.
- Questo risolve il problema. Ma l'**Ipotesi** è a sua volta un problema che deve essere risolto. E così via.

- La distinzione di **Aristotele** tra **dimostrazione che** e **dimostrazione perché**

- e la distinzione di **Cartesio** tra **dimostrazione assiomatica** e **dimostrazione analitica**

- suggeriscono **due diversi approcci** alle dimostrazioni esplicative:

- un approccio **statico** e un approccio **dinamico**.

Approccio statico alla spiegazione

- Una dimostrazione è esplicativa se è una dimostrazione assiomatica che dà una risposta alla domanda: **Perché è vero *P***?

Approccio dinamico alla spiegazione

- Una dimostrazione è esplicativa se è una dimostrazione analitica che dà una risposta alla domanda: **Come si arriva a *P***?

- Questo siginfica che, una dimostrazione è esplicativa se è una dimostrazione analitica che rivela la via della scoperta,

- e in particolare rivela al ricercatore come trovare una soluzione del problema,

- e rivela all'uditorio come è stata trovata la soluzione.

Limite dell'approccio statico

van Fraassen

- "Che cosa si richiede con la domanda 'Perché è vero *P*?', varia da contesto a contesto".

- Uno scopo della scienza è di "soddisfare certi nostri desideri", e "l'esatto contenuto del desiderio, e la valutazione se esso sia soddisfatto, varia da contesto a contesto".

- Per esempio, sia *P* il teorema di **Pitagora**, e supponiamo di chiederci: Perché è vero *P*?

- Con questa domanda possiamo desiderare di sapere, ad esempio:

- 1) Perché è vero *P* per i triangoli rettangoli, e non per quelli acutangoli o ottusangoli?

- Oppure possiamo desiderare di sapere:

- 2) Perché è vero *P* nello spazio euclideo, e non in certi spazi non-euclidei?

- Una dimostrazione di *P* potrebbe soddisfare il nostro desiderio 1) ma non il nostro desiderio 2), e viceversa.

- Questo significa che una dimostrazione può essere **esplicativa solo rispetto a un certo contesto**.

Approccio statico alla spiegazione (riveduto)

- Una dimostrazione è esplicativa **rispetto a un certo contesto**, se è una dimostrazione assiomatica che dà una risposta alla domanda: **Perché è vero *P* rispetto a quel contesto**?

Cartesio

- "Gli antichi geometri erano soliti servirsi solo della **sintesi**", cioè del **metodo assiomatico**, "nei loro scritti".

- E questo "non perché ignorassero completamente l'**analisi**", cioè il **metodo analitico**, ma, al contrario, perché "ne facevano un così gran conto da tenerselo per sé come un segreto importante".

- Essi si comportavano così "per una sorta di perniciosa scaltrezza".

- Infatti, "come si sa che molti artefici hanno fatto con le loro scoperte, essi forse temevano che" il loro metodo, "essendo facilissimo e semplice, sarebbe stato svilito se fosse stato divulgato".

- Quello che è interessante in questa affermazione di **Cartesio** non è la tesi, discutibile, che gli antichi geometri nascondessero le loro vie della scoperta per una sorta di perniciosa scaltrezza.

- È invece l'osservazione che molti scopritori **non presentano i loro risultati nel modo in cui li hanno scoperti**, **ma in un modo completamente diverso**, in particolare, col metodo assiomatico.

- Questo accade perché:

P.J. Davis e R. Hersh

- Negli articoli di matematica, "certi ragionamenti 'euristici' sono considerati 'inessenziali' o 'irrilevanti' ai fini della publicazione".

- Oppure, perché gli scopritori, o non sono del tutto consapevoli dei loro processi di scoperta, oppure sono in imbarazzo ad ammettere che i loro processi non sono stati rigorosamente deduttivi.

Per vedere che aspetto hanno le dimostrazioni esplicative nell'approccio dinamico è utile considerare le **dimostrazioni diagrammatiche** (o **dimostrazioni senza parole**)

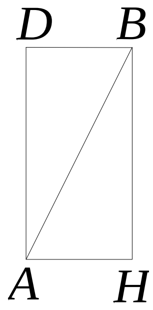
Papiro di Rhind

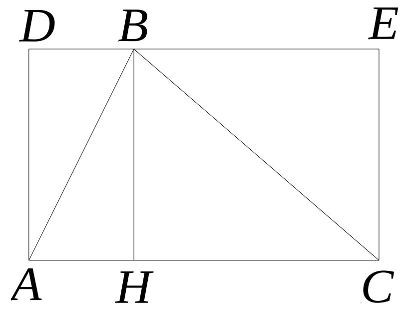
Problema 51

- **Problema:** "Qual è l'area di un triangolo di altezza 10 khet e base 4 khet?" (1 khet = 52.5 metri).

- **Risposta:** "**Prendi 1/2** di 4, cioè 2, **per ottenere il suo rettangolo**. Moltiplica 10 per 2; questa è la sua area".

- **Ipotesi chiave per la soluzione**: un triangolo è metà di un rettangolo **[Prendi 1/2 ... per ottenere il suo rettangolo]** con la stessa base e la stessa l'altezza.





- La figura mostra che, se il triangolo *ABH* è rettangolo, allora *ABH* è la metà del rettangolo *ADBH*.
- D'altra parte, l'altezza *BH* divide un triangolo *ABC* in due triangoli rettangoli, *ABH* e *CBH*.
- Allora *ABH* è la metà del rettangolo *ADBH*, e *CBH* è la metà del rettangolo *CEBH*.
- Perciò il triangolo *ABC* è la metà del rettangolo *ADEC*. Pertanto l'area del triangolo è la metà della base per l'altezza.
- Questa è la chiave della scoperta, che suggerisce l'ipotesi che **un triangolo è metà di un rettangolo con la stessa base e la stessa l'altezza**.
- Questa **ipotesi si ottiene da una singola figura**, dunque **per induzione da un singolo caso**.

Illusorietà del ruolo di giustificazione delle dimostrazioni assiomatiche

- Scopo di una dimostrazione assiomatica è fornire la giustificazione di un teorema.

- Dunque, nel metodo assiomatico, la dimostrazione ha un ruolo di validazione, serve a **stabilire la certezza del teorema**.

- Almeno, questa è la concezione prevalente, è tale concezione è ampiamente condivisa ancor oggi.

Gowers

- Una dimostrazione assiomatica è "un argomento che mette una proposizione al di là di ogni possibile dubbio".

- È questo che "rende unica la matematica".

Bass

- "La caratteristica che distingue la matematica da tutte le altre scienze è la natura della conoscenza matematica e la sua certificazione mediante la dimostrazione matematica", cioè la dimostrazione basata sul "metodo deduttivo assiomatico".

- Questo fa della matematica "la sola scienza che perciò può avanzare la pretesa della certezza assoluta".

- Ma affermare questo è ingiustificato.

- Un teorema dimostrato mediante una dimostrazione assiomatica non può essere più certo degli assiomi da cui viene dedotto.

- Ora, per il **secondo teorema di incompletezza di Gödel**, non si può dare una giustificazione assolutamente certa degli assiomi delle teorie di base della matematica.

- Perciò è illusorio pensare che una dimostrazione assiomatica possa stabilire la certezza assoluta di un teorema.

- Ed è illusorio pensare che la matematica possa essere una scienza assolutamente certa.

- Questa è la conclusione a cui arrivò anche Russell dopo due decenni di infruttuosi tentativi di stabilire la certezza assoluta della matematica.

Russell

- "Volevo la certezza nello stesso modo in cui le persone vogliono la fede religiosa, e pensavo che ci fossero più possibilità di trovare la certezza in matematica che altrove".

- Ma, "avendo costruito un elefante su cui poter appoggiare il mondo matematico, mi accorsi che l'elefante era malfermo" e, "dopo circa vent'anni di durissimo lavoro, giunsi alla conclusione che non c'era nient'altro che potessi fare per rendere indubitabile la conoscenza matematica".

- "La splendida certezza che avevo sempre sperato di trovare in matematica si era persa in un incredibile ginepraio".

Funzione retorica delle dimostrazioni assiomatiche

- Lo scopo di una dimostrazione assiomatica non è quello di stabilire la certezza di un teorema.

- È invece quello di **persuadere** l'uditorio che il teorema può essere accettato in quanto può essere dedotto dagli assiomi.

- In quanto una dimostrazione assiomatica serve a persuadere l'uditorio, si può dire che la dimostrazione assiomatica ha una funzione **retorica**.

Hardy

- "Le dimostrazioni sono ciò che **Littlewood** e io chiamiamo '**gas**' ", ovvero 'chiacchiere', 'ciance', "**infiorettamenti retorici** che hanno lo scopo di influenzare la psicologia, disegni sulla lavagna nelle lezioni, mezzi per stimolare l'immaginazione degli studenti".

Davis e Hersh

- In matematica "si fa un uso continuo ed essenziale di **modi retorici** di argomentazione e persuasione".

Kitcher

- In matematica "la presentazione della dimostrazione ha una **funzione retorica**" perché "una presentazione di una dimostrazione che è efficace per un certo tipo di pubblico" può "essere inutile per altri pubblici", e "il '**gas**' è necessario anche nella matematica professionale".

Resnik

- Le dimostrazioni "devono essere confezionate su misura dell'uditorio," e l'uditorio deve essere "disposto ad accettare come date le premesse su cui esse si basano".

- Ma l'uditorio potrebbe essere disposto ad accettare come date tali premesse anche se esse fossero soltanto "un'elaborata mitologia tramandata di generazione in generazione dalla casta sacerdotale della matematica".

Implicazione per l'approccio statico

- Secondo l'approccio statico, una dimostrazione è esplicativa rispetto a un certo contesto se è una dimostrazione assiomatica che dà una risposta alla domanda: Perché è vero *P* rispetto a quel contesto?

- Ora, se lo scopo delle dimostrazioni assiomatiche è persuadere l'uditorio, questo significa che una dimostrazione che è esplicativa nell'approccio statico deve essere capace di persuadere l'uditorio che *P* è vero rispetto al contesto in questione.

- Se, per le connotazioni negative spesso associate alla retorica, non si vuol parlare di 'funzione retorica' delle dimostrazioni assiomatiche, si può parlare di 'funzione didattica'.

- Ma la sostanza è la stessa, in entrambi i casi ci si riferisce alla funzione di persuasione rispetto a un uditorio.

Funzioni delle dimostrazioni esplicative

- La funzione **retorica** o **didattica** delle dimostrazioni esplicative nell'approccio statico è importante per gli **aspetti sociali** della matematica

- Essi si presentano in svariate situazioni, dalle relazioni ai congressi alle lezioni in classe.

Davis e Hersh

- "La matematica è una forma di interazione sociale in cui la 'dimostrazione' è un composto di formale e informale, di calcoli e commenti occasionali, di argomenti convincenti e appelli all'immaginazione e all'intuizione".

- La funzione retorica o didattica delle dimostrazioni esplicative nell'approccio statico è diversa dalla **funzione euristica** delle dimostrazioni esplicative nell'approccio dinamico, che è importante per l'**aspetto creativo** della matematica.

- Ciò che è essenziale per l'aspetto creativo è la capacità della dimostrazione di rivelare la via della scoperta, suggerendo un'ipotesi che è la chiave della scoperta della soluzione di un problema.

- Tale è l'ipotesi che un triangolo sia metà di un rettangolo con la stessa base e la stessa l'altezza, ipotesi che fornì a un ignoto matematico egiziano la chiave per scoprire che l'area di un triangolo è metà della base per l'altezza.

- Perciò l'alternativa non è, come diceva **Lord Rayleigh**, tra le dimostrazioni che "costringono all'assenso" e le dimostrazioni che "conquistano e affascinano l'intelletto", suscitando "piacere e un irrefrenabile desiderio di dire 'Amen, Amen' ".

- L'alternativa è invece tra le dimostrazioni che hanno una funzione persuasiva, e le dimostrazioni che hanno una funzione euristica.

- In un certo senso, comunque, la persuasione **svolge un ruolo anche nell'approccio dinamico**.

- Infatti, è la persuasione che un risultato sia plausibile che spesso spinge il ricercatore a cercare ipotesi per la soluzione.

Importanza per la pratica matematica

- Nell'approccio statico, le dimostrazioni esplicative sono importanti per la pratica matematica perché persuadono l'uditorio della conclusione.

- Esse sono essenziali per l'**accettazione** della matematica.

- Nell'approccio dinamico, le dimostrazioni esplicative sono importanti per la pratica matematica perché rivelano la via della scoperta. Esse sono essenziali per la **crescita** della matematica.

- Ma, nell'approccio dinamico, le dimostrazioni esplicative sono importanti anche in un altro modo.

- Lo sviluppo della matematica viene spesso visto come **cumulativo**.

- Le scoperte matematiche vengono viste come mere aggiunte o incrementi al cumulo crescente dei risultati matematici.

Devlin

- "**La conoscenza matematica è cumulativa**".

- Questo dipende dal fatto che "**la matematica consiste nell'effettuare deduzioni da assiomi**".

- Dire che la matematica è cumulativa, però, è adeguato solo per quanto riguarda l'aggiunta di **corollari** di teoremi noti.

- È inadeguato, invece, per quanto riguarda l'aggiunta di risultati davvero innovativi – risultati che comportano l'introduzione di **idee realmente nuove**.

- L'aggiunta di queste ultime retroagisce su alcune parti tradizionali della matematica.

- Offrendo una nuova prospettiva su oggetti precedentemente familiari, essa influenza il modo in cui quelle parti tradizionali sono costruite, portando a ricostruirle su nuove basi.

- Perciò la conoscenza matematica **non è cumulativa**.

- Ciò mostra che, nell'approccio dinamico, le dimostrazioni esplicative hanno un carattere dinamico non soltanto perché portano a scoperte matematiche.

- Lo hanno anche perché possono retroagire su certe parti tradizionali della matematica, offrendo una nuova prospettiva su oggetti familiari e portando a cambiamenti in quelle parti tradizionali della matematica.

Concezione globale e locale della spiegazione

- L'approccio **statico** e quello **dinamico** alle dimostrazioni esplicative comportano una concezione **globale** e **locale** della spiegazione, rispettivamente.

- Questo dipende dal fatto che il metodo assiomatico ha un carattere **globale**, il metodo analitico un carattere **locale**.

- Infatti, nel metodo assiomatico, su cui si basano le dimostrazioni esplicative nell'approccio statico, gli assiomi servono a dimostrare, e quindi a spiegare, tutti i fatti matematici di una data teoria.

- Perciò la spiegazione di tutti tali fatti si fonda sugli stessi assiomi e di conseguenza è globale.

- Questo giustifica l'affermazione di **Sierpinska**, che la ricerca di una spiegazione in matematica non è davvero la ricerca di una dimostrazione.

- È piuttosto un tentativo di trovare una ragione della scelta degli assiomi, definizioni e metodi di costruzione di una teoria.

- In effetti, nell'approccio statico, la spiegazione in ultima analisi consiste non nella dimostrazione in sé ma piuttosto nella teoria nel suo complesso, dunque, appunto, nella ragione della scelta dei suoi assiomi, definizioni, metodi di costruzione.

- Invece, nel metodo analitico, su cui si basano le dimostrazioni esplicative nell'approccio dinamico, le ipotesi per la soluzione di un problema non sono principi generali, buoni per ogni problema.

- Esse sono mirate a uno specifico problema, e in questo senso sono **locali** piuttosto che globali.

- Il loro non essere globali implica che le ipotesi per la soluzione di un problema non devono necessariamente appartenere allo stesso campo della matematica a cui appartiene il problema, possono appartenere a qualsiasi campo.

- Per questa ragione, **a differenza del metodo assiomatico**, **il metodo analitico è compatibile con il primo teorema di incompletezza di Gödel**.

- Inoltre, essendo rivolte a uno specifico problema, le ipotesi nel metodo analitico possono tener conto delle peculiarità del problema, e perciò possono dare una spiegazione tagliata su misura per il problema.

- Dunque, nell'approccio dinamico, la spiegazione può render conto delle peculiarità del problema.

Comprensione delle dimostrazioni esplicative

- Non tutte le dimostrazioni esplicative sono comprensibili allo stesso livello.

- Sia nell'approccio statico che in quello dinamico si possono distinguere almeno due livelli di comprensione.

- Nell'approccio statico, un primo livello di comprensione si ha quando la dimostrazione è tale che l'uditorio è in grado di **seguire tutti i suoi passaggi**.

- Questo è un livello **inferiore** di comprensione, perché l'uditorio, pur seguendo tutti i passaggi, può avere la sensazione di **non riuscire a capire pienamente la dimostrazione**.

- L'uditorio **non vede l'idea della dimostrazione**, e perciò non è in grado di afferrare il contesto più profondo.

Poincaré

- "Capire la dimostrazione di un teorema è forse esaminare l'uno dopo l'altro tutti i sillogismi che la compongono, e constatare che ciascuno di essi è corretto, conforme alle regole del gioco?"

- La risposta è no per la maggior parte delle persone perché, fin quando esse "avranno l'impressione che questi sillogismi siano frutto di un qualche capriccio e non già opera di un'intelligenza costantemente consapevole dello scopo da raggiungere, non riterranno di aver capito".

- Perciò, anche "quando il logico ha scomposto ogni dimostrazione in una moltitudine di operazioni elementari, tutte corrette, non possiederà ancora tutta quanta la realtà".

- "Gli sfuggirà del tutto quel non so che che costituisce l'unità della dimostrazione".

- Un livello superiore di comprensione si ha quando la dimostrazione è tale che l'uditorio vede l'idea della dimostrazione, e perciò è in grado di afferrare il contesto più profondo.

- Dall'altro lato, nell'approccio dinamico, un primo livello di comprensione si ha quando la dimostrazione è tale che il ricercatore o l'uditorio sono in grado di vedere l'idea che sta alla base della scoperta della dimostrazione.

- Si tratta di un livello **inferiore** di comprensione, perché vedere l'idea non basta per elaborare l'intera serie di inferenze che porta alla scoperta della dimostrazione.

- Un livello di comprensione superiore si ha quando la dimostrazione è tale che il ricercatore o l'uditorio sono in grado di vedere l'intera serie di inferenze che porta alla scoperta della dimostrazione.

- Vederla può dare all'uditorio l'illusione che la dimostrazione potrebbero averla scoperta loro stessi.

Poincaré

- "Quando ripeto un'argomentazione che ho appreso", mi sembra "che avrei potuto scoprirla io".

- "Questa è spesso solo un'illusione; ma, anche così," io "nel ripeterla la riscopro".

- In effetti, se si riesce a vedere l'intera serie di inferenze che porta alla scoperta della dimostrazione, si hanno in mano tutti i fili necessari per la scoperta.

- Questo implica che la scoperta della dimostrazione è un processo del tutto razionale, che non richiede alcun appello all'intuizione.