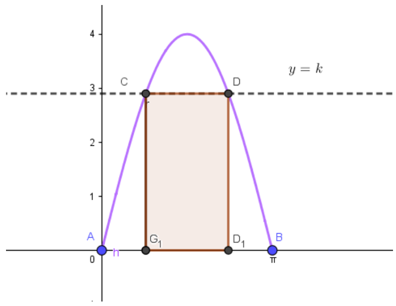
Soluzione di Adriana Lanza

Quesito 1- sessione suppletiva 2018

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento AB e dall'arco di curva avente equazione $y = 4 sen\, x$, con $0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento AB.

Soluzione

Una retta di equazione $y = k \quad con \quad 0 \le k \le 4$ incontra l'arco di curva di equazione $y = 4\,\mathrm{sen}\, x$, $con \quad 0 \le x \le \pi,$ nei punti di coordinate



$$C\left(arcsen\frac{k}{4}; k\right) \qquad D(\pi - arcsen\frac{k}{4}; k)$$

Il perimetro del rettangolo inscritto è

$$P(k) = 2\left(\pi - 2arcsen\,\frac{k}{4} + k\right) \qquad 0 < k < 4$$

con

$\lim_{k\to 0^+} P(k) = 2\pi \quad e \quad \lim_{k\to 4^-} P(k) = 8 \quad casi\ limite - \quad rettangoli \quad degeneri$

La funzione $2\left(\pi - 2arcsen\,\frac{k}{4} + k\right)$ è continua e derivabile in $(-4; 4)$

E' prolungabile in modo continuo agli estremi dell'intervallo, mentre per la sua derivata $2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{16-k^2}}\right)$ si ha

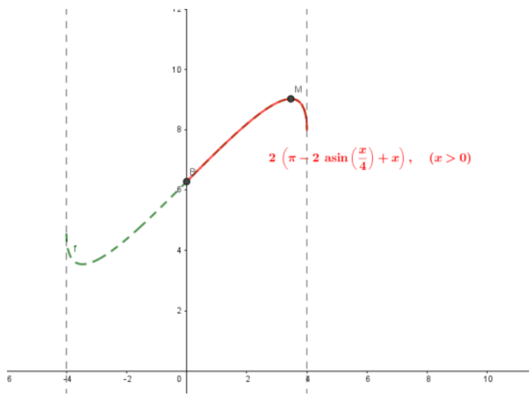
$$\lim_{k\to -4^+} 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{16-k^2}}\right) = \lim_{k\to 4^-} 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{16-k^2}}\right) = -\infty$$

La sua restrizione $P(k)$ è continua e derivabile in $(0; 4)$.

Risulta

$$\lim_{k\to 0^+} P'(k) = 1 \qquad\qquad \lim_{k\to 4^-} P'(k) = -\infty$$

Studio del segno della derivata $\quad 0 < k < 4$



$$1 - \frac{2}{\sqrt{16-k^2}} \ge 0 \quad \to \quad \sqrt{16-k^2} - 2 \quad \ge 0 \ \to 16 - k^2 \ge 4$$

$$\to 12 - k^2 \ge 0$$

La disequazione $12 - k^2 \ge 0$ è risolta per $\quad 0 < k < 2\sqrt{3}$ nell'intervallo $(0; 4)$

Poiché

$P'(2\sqrt{3}) = 0$

$P'(k) > 0 \quad per \quad 0 < k < 2\sqrt{3} \ \to P(k)$ è $crescente$

$P'(k) < 0 \quad per \quad 2\sqrt{3} \ \ k < 4 \to \ P(k)$ è $decrescente$

la funzione $P(k)$ assume valore massimo per $k = 2\sqrt{3}$ in $[0; 4]$

Il valore massimo è $P(2\sqrt{3}) = 2\left(\pi - 2arcsen\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\right)$=

$$= 2\left(\pi - \frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}\right) = \mathbf{2\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \approx 9}$$

Soluzione di Adriana Lanza