

Sessione ordinaria 2011- Scuole italiane all'estero- Europa

Quesito 1.

Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d .

SOLUZIONE

Indicando con a la misura del lato minore le misure dell'altro cateto e dell'ipotenusa saranno, rispettivamente $a + d$ e $a + 2d$ con $d > 0$

Per l'esistenza del triangolo deve essere soddisfatta la relazione

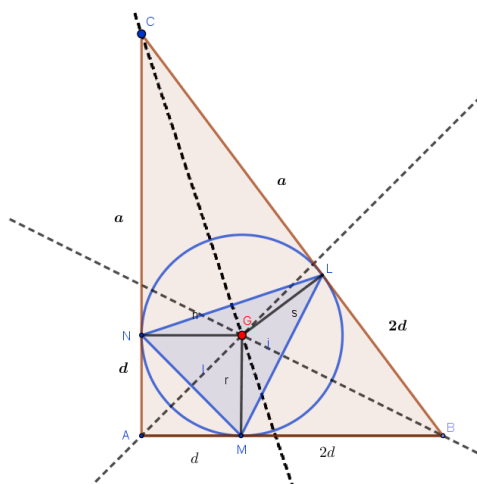
$$a + 2d < 2a + d \rightarrow 0 < d < a$$

Imponendo la relazione pitagorica $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2 \rightarrow$

$$a^2 - 2da - 3d^2 = 0 \rightarrow a = -d \cup a = 3d$$

Delle due soluzioni solo la seconda è accettabile, pertanto le misure dei lati del triangolo sono, rispettivamente $3d, 4d, 5d$, proporzionali, cioè, alla terna pitagorica 3,4,5, corrispondente al valore $d = 1$.

Poiché quest'ultimo caso il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ha lunghezza unitaria, essendo $r(1) = \frac{Area}{semiperimetro} = \frac{12}{12} = 1$, in generale, per ragioni di similitudine, sarà $r(d) = d$



Geometricamente si ha la situazione seguente

$$\overline{AM} = \overline{AN} = d$$

$$\overline{CN} = \overline{CL} = a$$

$$\overline{BL} = \overline{BM} = 2d$$

Le bisettrici degli angoli del triangolo ABC coincidono con gli assi dei lati del triangolo MLN, il punto G, incentro del primo triangolo, è anche circocentro del secondo ed è equidistante dai suoi vertici.