PROBLEMA 1

Assegnata la funzione $f(x) = a\, x\, ln\,(x) - \frac{3}{2}x$

a) determinare il valore del parametro reale a **in modo che** f **abbia un punto di minimo assoluto in** $x=\sqrt{e}$**. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico.**

Si ponga, d'ora in avanti, a**=1.**

b) Si verifichi che esiste una sola retta tangente t **alla curva di equazione** $y=f(x)$**, condotta dal punto** $Q(0,-1)$**. Determinare l'equazione di** t **e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.**

c) Determinare i parametri reali h, k **in modo che le curve di equazioni** $y = f(x)$ **e** $y = \frac{x+h}{x+k}$ **risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.**

d) Studiare la funzione

$$g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g **nel suo punto di ascissa** $x=e$

Soluzione

a) Osserviamo innanzi tutto affinché la funzione ammetta un minimo assoluto nel punto $x=\sqrt{e}$. , l'insieme immagine non deve essere illimitato inferiormente

Poiché,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax\ln x + 0 = \lim_{x\to 0^+} a\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \mathbf{0}$$ in quanto la funzione che sta al numeratore è un infinito di ordine inferiore a quella del denominatore

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{a}\ln x - \frac{3}{2}\right) = \begin{cases} -\infty & a \le 0 \\ +\infty & a > 0 \end{cases}$$

deve essere $a > 0$

La funzione $f(x)$ è definita e derivabile per $x > 0$,

La derivata

$f'(x) = a\,ln\,(x) + a - \frac{3}{2}$, per a>0, è una funzione monotona crescente ed assume il valore 0 solo in un punto , di ascissa $x = e^{\frac{3}{2a}-1}$, il quale è punto di minimo relativo e assoluto per $f(x)$.

Andamento di f(x)	0	$e^{\frac{3}{2a}-1}$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - -	+ + + + + + + + +
$f(x)$	↘	↗
La derivata seconda $f''(x) = \frac{a}{x}$ + sempre positiva nel dominio di $f(x)$. La curva volge sempre la concavità verso l'alto		

Il valore di a richiesto si trova imponendo $e^{\frac{3}{2a}-1} = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{3}{2a} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \boldsymbol{a = 1}$

La funzione da considerare è $f(x) = x \ln x - \frac{3}{2}x$. La sua derivata è $f'(x) = \ ln\,x - \frac{1}{2}$

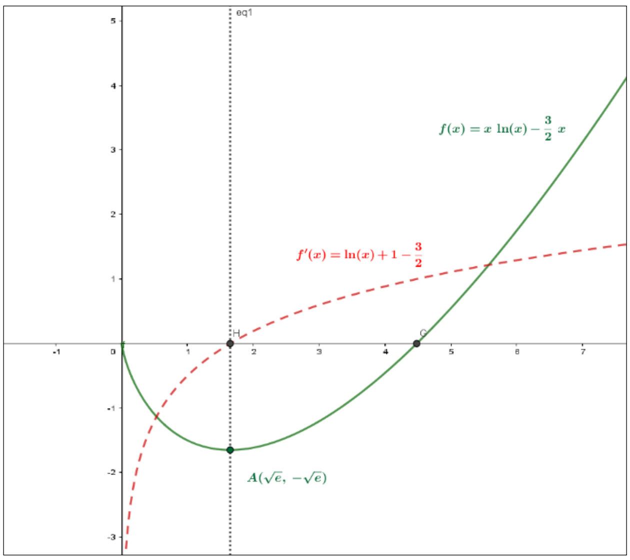
Segno di $\boldsymbol{f(x) = \ x\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)}$

La funzione, definita per $x > 0$; ha un solo zero : $x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \approx 4{,}48$

0_________________$e^{\frac{3}{2}}$________________________

\- - - - - - - - - - - - - + + + + + + + + + + + +

Grafico di $f(x)$ e di $f'(x)$



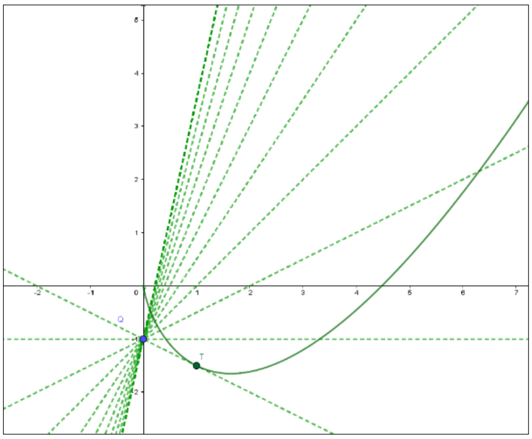
b) La retta t del fascio di centro Q(0,-1) ha equazione $y = mx - 1$

Le condizioni di tangenza alla curva di equazione $y = f(x)$ sono

$$\begin{cases} f(x) = mx - 1 & \textit{passaggio per il medesimo punto } T(x,y) \\ f'(x) = m & \textit{uguaglianza delle due derivate calcolate in } T \end{cases} \rightarrow$$

$$f(x) = xf'(x) - 1 \rightarrow x\ln x - \frac{3}{2}x = x\ln x - \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ m = f'(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Essendo $f(1) = -\frac{3}{2}$ il punto di tangenza è

$T\left(1, -\frac{3}{2}\right)$

L'equazione della retta t è $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x - 1}$

c) Si chiede, sostanzialmente, di determinare i parametri h e k affinché la curva di equazione $y = \frac{x+h}{x+k}$ passi per il punto $T\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ e sia ivi tangente alla retta $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (sfruttando i risultati del punto b),

ovvero $y'(1) = -\frac{1}{2}$

Imponendo le due condizioni si perviene al sistema

$$\begin{cases} \frac{1+h}{1+k} = -\frac{3}{2} \\ \frac{k-h}{(1+k)^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad k \neq -1$$

$$\begin{cases} 2 + 2h = -3 - 3k \\ 2k - 2h = -k^2 - 2k - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2h = -5 - 3k \\ 2h = k^2 + 4k + 1 \end{cases} \rightarrow k^2 + 7k + 6 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -1 & \textit{non accettabile} \\ k = -6 \end{cases} \rightarrow h = \frac{13}{2}$$

La curva tangente in T al grafico di $f(x)$ è l'iperbole equilatera di equazione

$$y = \frac{x + \frac{13}{2}}{x - 6}$$

d) Essendo la funzione integranda continua nell'intervallo aperto $]0, +\infty[$, la funzione integrale $g(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ è derivabile nello stesso intervallo e risulta

$$g'(x) = f(x)$$

L' espressione analitica si determina partendo dal calcolo dell'integrale indefinito

$\int\left(t\ln t-\frac{3}{2}t\right)dt==\frac{t^2\ln t}{2}-\frac{t^2}{4}-\frac{3}{4}t^2+c=\frac{t^2\ln t}{2}-t^2+c$

dove , per determinare una primitiva della prima funzione, è stato usato il metodo di integrazione per parti $\int t\ln t\,dt=\frac{t^2\ln t}{2}-\frac{1}{2}\int t dt=\frac{t^2\ln t}{2}-\frac{t^2}{4}$

Pertanto, $\boldsymbol{g(x)}=\int_1^x \boldsymbol{f(t)\,dt}=\left[\frac{t^2\ln t}{2}-t^2\right]_1^x=\boldsymbol{\frac{x^2\ln x}{2}-x^2+1}$

Osserviamo che

$\boldsymbol{g(1)=0}\qquad \lim_{x\to0^+}\boldsymbol{g(x)=1}\qquad \lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{g(x)}=+\infty$

Andamento di $g(x)$

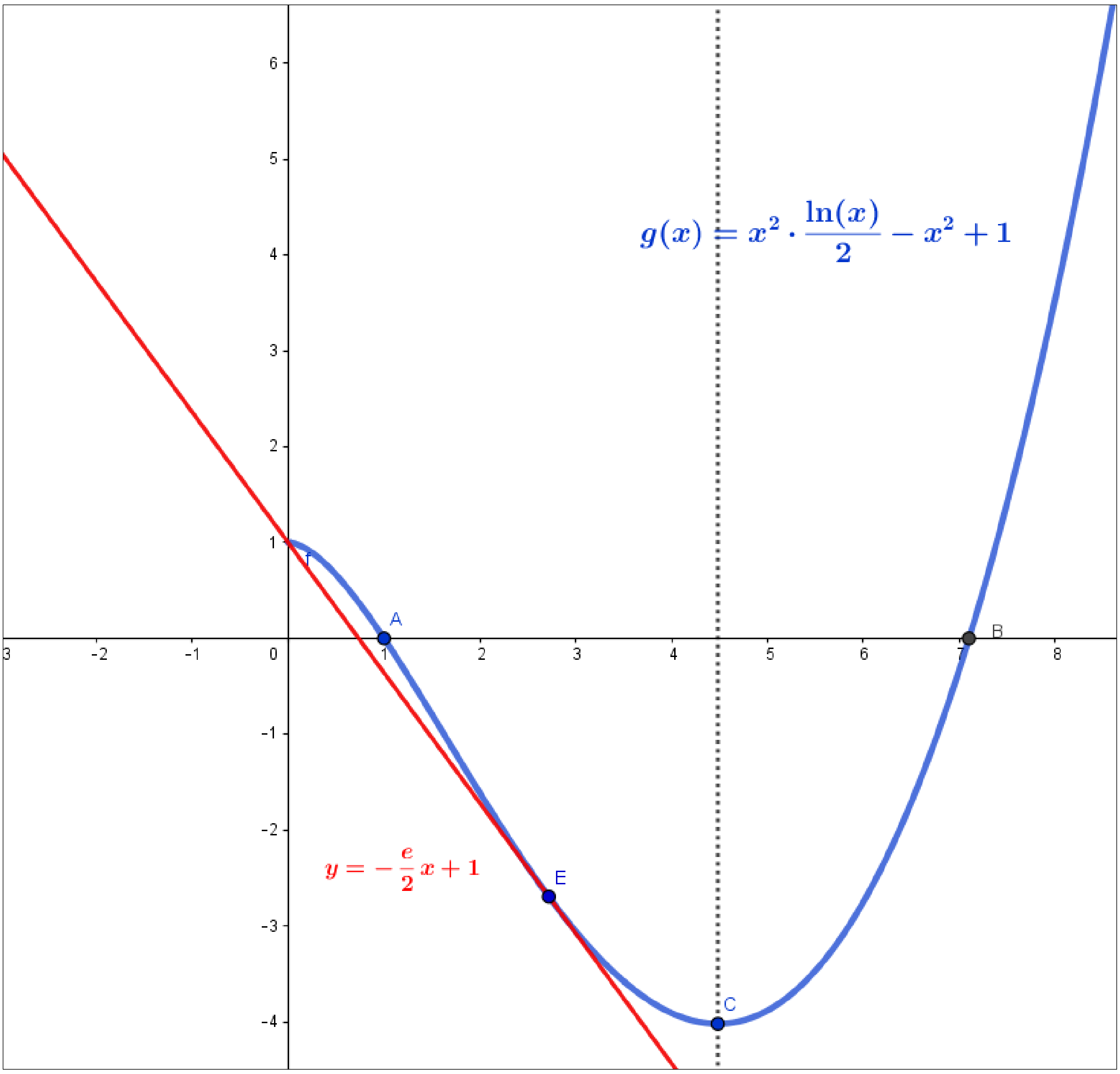
	0	$\sqrt{e}$	$e\sqrt{e}$
$g'(x)=f(x)$	- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	+ + + + + +
$g''(x)=f'(x)$	- - - - - - - - - -	+ + + + + +	+ + + + + +
$g(x)$	Decrescente concava	Decrescente convessa	Crescente convessa

Minimo relativo e assoluto $C\left(e\sqrt{e},\ 1-\frac{e^3}{4}\right)$ Flesso $F\left(\sqrt{e},1-\frac{3}{4}e\right)$

Il punto di ascissa $x=e$ ha ordinata $g(e)=\frac{e^2}{2}-e^2+1=1-\frac{e^2}{2}$

Il coefficiente angolare della retta tangente è $f(e)=e-\frac{3}{2}e=e-\frac{3}{2}e=-\frac{e}{2}$

La retta tangente ha equazione $y-1+\frac{e^2}{2}=-\frac{e}{2}(x-e)\rightarrow \boldsymbol{y=-\frac{e}{2}x+1}$



$g(x) = x^2 \cdot \frac{\ln(x)}{2} - x^2 + 1$
$y = -\frac{e}{2}x + 1$
A
B
C
E
f