**PROBLEMA 2**

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con $k$ parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.

È noto che:

$$P''(x) = 12x^2 - 24x$$

- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale
- il valore massimo assunto dalla funzione $Q$ è uguale a $\frac{27}{4}$

a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni

$$y = P(x) \cdot Q(x) \; e \; y = \frac{1}{P(x)}$$

D'ora in avanti, si assuma che $P(x) = x^4 - 4x^3$.

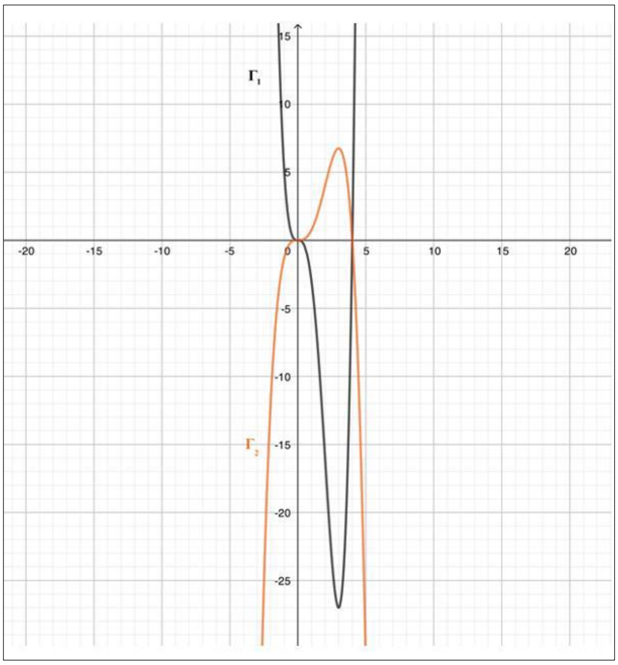
c) Calcolare l'area della regione $R$ delimitata dal grafico della funzione $P$ e dall'asse delle ascisse.

d) Verificare che, per $x$>4, la funzione $F(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{x-4}{x}$ è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$.

Esprimere, in funzione di $t$, con $t$≥5, l'integrale

$$\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,dx$$

e calcolarne il limite per $t$→+∞ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



## Soluzione

**a)** Se $P(x)$ ha nell'origine un flesso a tangente orizzontale deve essere

$$P(0) = 0 \quad P'(0) = 0 \quad P''(0) = 0$$

La terza condizione si verifica facilmente , essendo $P''(x) = 12x^2 - 24x$

Le prime due ci permettono di determinare

$$P'(x) = \int_0^x (12x^2 - 24x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$P(x) = \int_0^x (4x^3 - 12x^2)dx = x^4 - 4x^3$$

Andamento di $P(x)$- Funzione polinomiale definita in $\mathbb{R}$

Segno :$+ + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - -4 + + + +$

| | | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | - - - - - - -------- | - - - - - - -------- | - - - - - - -------- | + + + + + + + + + |
| $P''(x)$ | + + + + + + + + + | - - - - - - -------- | + + + + + + + + + | + + + + + + + + + |
| $P(x)$ | Decrescente convessa | Decrescente concava | Decrescente convessa | Crescente convessa |

$P(x)$ ha un minimo nel punto di ascissa $x = 3$ e ordinata $P(3) = -27$

Si riconferma il flesso per x=0 e si nota la presenza di un altro punto in cui la curva cambia concavità : il punto $(2, -16)$

L'andamento di $P(x)$ è coerente con il grafico $\Gamma_1$ della figura allegata dove è evidente un punto di minimo relativo e assoluto, avente ordinata negativa

$Q(x) = k( x^4 - 4x^3)$ ha gli stessi valori estremanti di $P(x)$

Per determinare il valore della costante k dobbiamo imporre che ha , nel punto di ascissa $x = 3$ e un massimo di ordinata $\frac{27}{4}$

$Q(4) = k\, P(4) = \frac{27}{4} \rightarrow -27\text{k} = \frac{27}{4} \rightarrow \text{k} = -\frac{1}{4}$ pertanto,

$$Q(x) = -\frac{1}{4}\ ( x^4 - 4x^3) = -\frac{x^4}{4} + x^3$$

**b)** Studio di $\boldsymbol{y = P(x) \cdot Q(x) = -\frac{1}{4}\ (x^4 - 4x^3)^2}$ prodotto di due funzioni polinomiali

**Dominio** : $\mathbb{R}$

**Zeri:** $x^6 = 0 \quad (\mathrm{x} - 4)^2 = 0$-

$x = 4$ è radice doppia mentre l'origine assorbe 6 delle 8 intersezioni dell'asse $x$ con la curva.

**Segno :** sempre negativo

**Estremi relativi e flessi**

- Studio della derivata prima e seconda

$$y'(x) = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x) = P'(x) \cdot k \cdot P(x) + P(x) \cdot k \cdot P'(x) =$$

$$2kP(x) \cdot P'(x) = -\frac{1}{2} P(x) \cdot P'(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3)(4x^3 - 12x^2) =$$

$$-2x^5(x-4)(x-3) = -2x^7 + 14x^6 - 24x^5$$

| | | 0 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | - - - - - - -------- | - - - - - - ------ | + + + + + + + + | + + + + + + + + |
| $P(x)$ | + + + + + + + + | - - - - - - ------ | - - - - - - -------- | + + + + + + + + |
| $-\frac{1}{2} P(x) \cdot P'(x)$ | + + + + + + + + | - - - - - - ------ | + + + + + + + + | - - - - - - ------ |
| $y(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ |

**massimi relativi** $\boldsymbol{O\ (0, 0)} \quad \boldsymbol{M(4, 0)}$

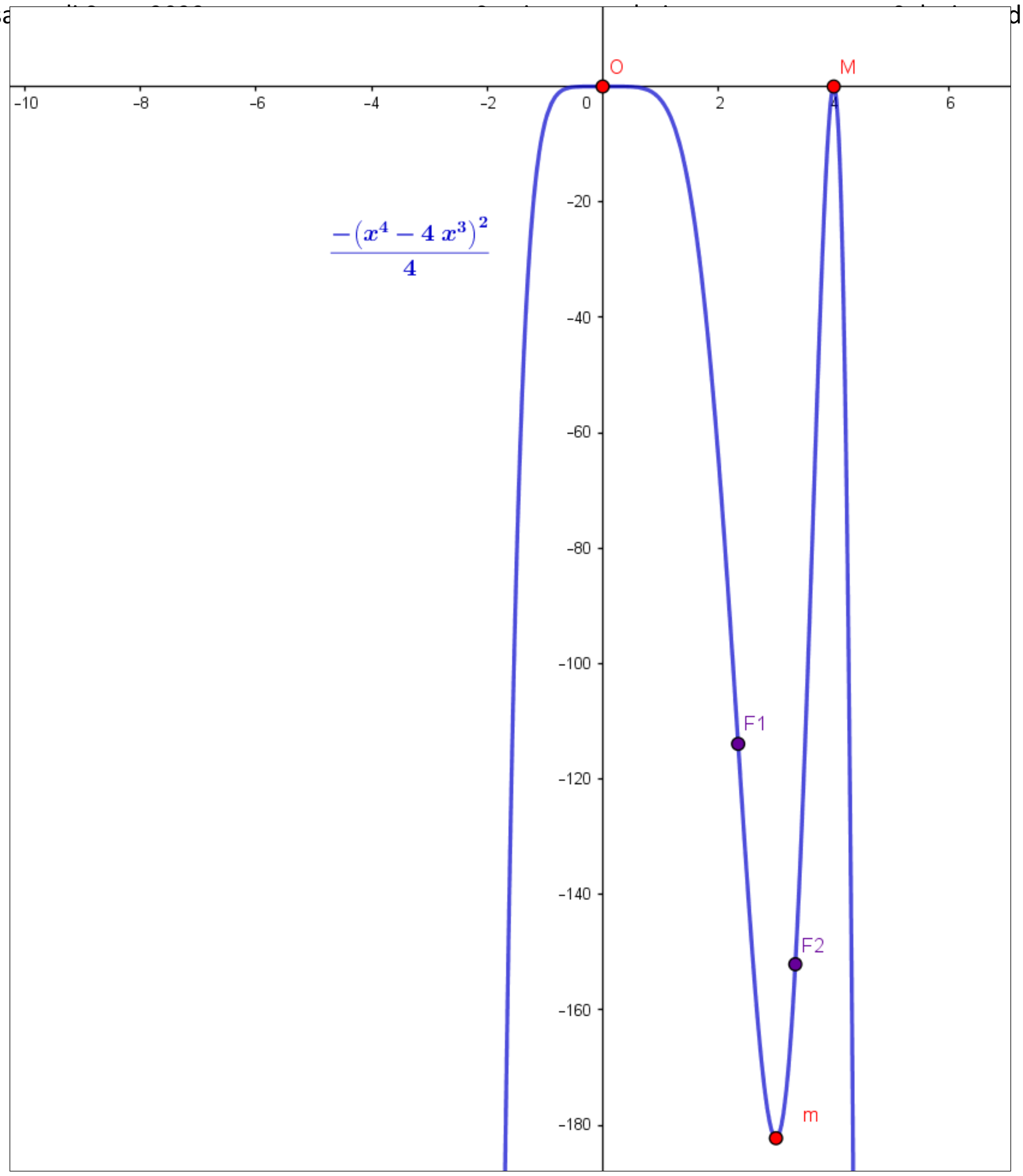
**minimo relativo** $\boldsymbol{m\left(3, -\frac{729}{4}\right)}$

$$y''(x) = -14x^6 + 84x^5 - 120x^4 = -2x^4(7x^2 - 42x + 60)$$

$$y''(x) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0 \quad x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{7} \quad x_3 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{7}$$

| | | **0** | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y''(x)$ | -------------- | --------------- | + + + + + + | -------------------------- |
| $y(x)$ | concava | concava | convessa | concava |
| | | | | |

I punti *di ascissa* $\left(3 \mp \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ sono **flessi**




**Studio di $\boldsymbol{\frac{1}{P(x)}}$**

**Dominio** : $\mathbb{R}.-\{0,4\}$

Il segno, nel dominio, è concorde con quello di P(x)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{P(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{P(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{P(x)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 4^+}\frac{1}{P(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{P(x)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{P(x)} = 0^+$$

**In corrispondenza degli zeri di $P(x)$ il grafico ha due asintoti verticali**
**Ammette anche un asintoto orizzontale coincidente con l'asse delle $x$**

La monotonia è invertita rispetto a quella di $P(x)$ . **Il punto M $\left(3,-\frac{1}{27}\right)$ è punto di massimo**

La derivata prima è $\boldsymbol{y'(x)} = -\frac{P\prime(x)}{(P(x))^2} = -\frac{4(x-3)}{x^4(x-4)^2}$

La derivata seconda è

$$\boldsymbol{y''(x)} = -4\frac{x^4(x-4)^2 - 2(x^3-4x^2)(3x^2-8x)(x-3)}{x^8(x-4)^4} =$$

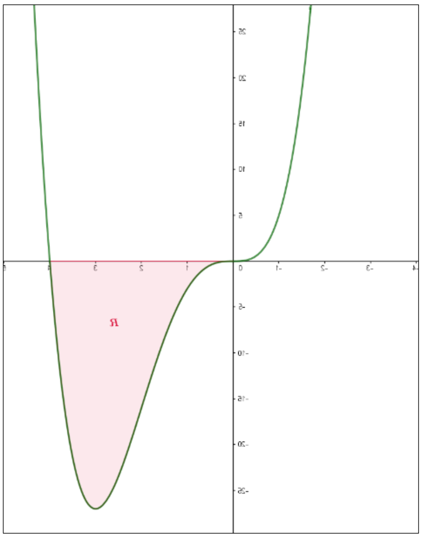
$$-4\frac{x(x-4) - 2(3x-8)(x-3)}{x^5(x-4)^3} = \boldsymbol{4\frac{5x^2 - 30x + 48}{x^5(x-4)^3}}$$

| | | 0 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y''(x)$ | $++++++$ | ---------------- | $++++++$ |
| $y(x)$ | convessa | concava | convessa |

La curva cambia concavità nell'intorno degli asintoti. **Non ci sono flessi**

**c)** La regione R giace nel semipiano delle $y$ negative, pertanto

**Area** $= -\int_0^4 (x^4 - 4x^3)\,dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{256}{5} = 51{,}2$




**d)** La funzione $\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{x-4}{x}}$ *con* $x > 4$ è derivabile nel suo dominio e la sua derivata è

$\boldsymbol{F'(x)} = \frac{1}{4}\frac{x}{x-4}\cdot\frac{4}{x^2} = \boldsymbol{\frac{1}{x(x-4)}}$

Si verifica facilmente che le due espressioni analitiche

$\boldsymbol{\frac{1}{x(x-4)}}$ e $\boldsymbol{\frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{x^4-4x^3}}$ coincidono nell'intervallo $x > 4$

Per quanto osservato prima, esiste la funzione integrale

$$\int_5^t \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{P(x)}}\,\boldsymbol{dx} = \left[\frac{1}{4}\ln\frac{x-4}{x}\right]_5^t = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}\frac{\boldsymbol{t-4}}{\boldsymbol{t}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}\frac{\boldsymbol{t-4}}{\boldsymbol{t}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln\,5}$$

essendo $\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{t-4}{t}\right) = \ln 1 = 0$

Il significato geometrico della convergenza dell'integrale improprio $\int_5^{+\infty}\frac{x^2}{P(x)}\,dx$ è:

<<Alla regione di piano sottesa dalla curva e dall'asse $x$ nell'intervallo illimitato $x \geq 5$, si può attribuire un'area di valore finito uguale a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_5^t \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{P(x)}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{ln\,5} \approx \mathbf{0.40}$$