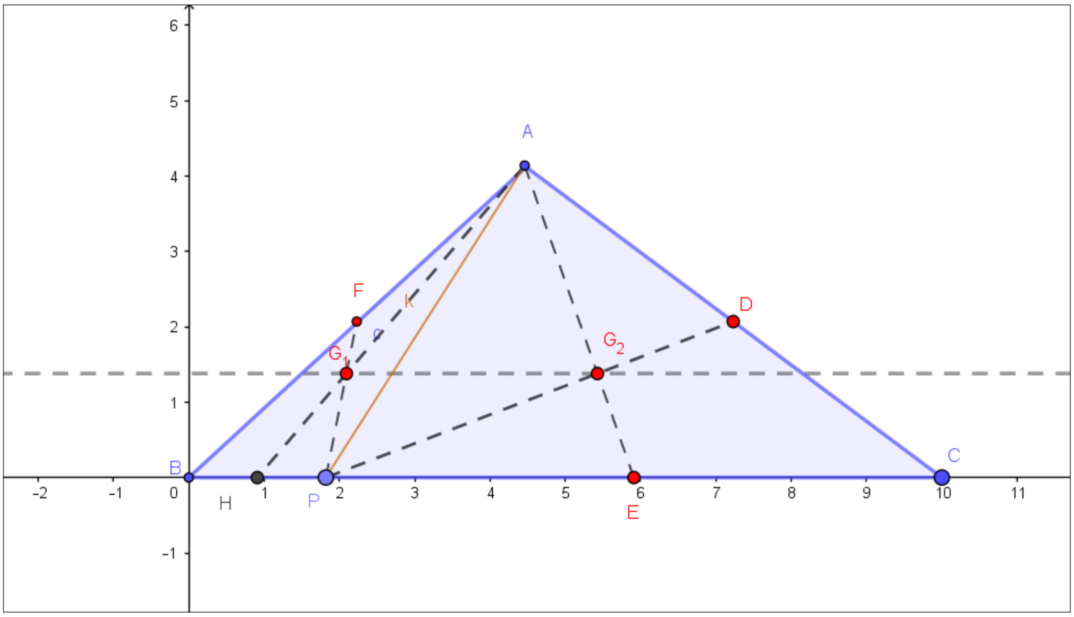
Quesito 1
Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G_1 e G_2 i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento G_12 è parallelo a BC.

Soluzione



Con riferimento alla figura, si scelga un riferimento cartesiano avente l'origine nel punto B e l'asse delle x coincidente con la retta BC.

Le coordinate dei vertici del triangolo ABC siano

$$A(x_A, y_a) \qquad B(0,0) \qquad C(\,x_C, 0)$$

e quelle del punto P(x,0) con $0 < x < x_C$

Il baricentro del triangolo ABP ha coordinate $G_1(\frac{x_A+x}{3}\,, \frac{y_A}{3})$

Il baricentro del triangolo ACP ha coordinate $G_2(\frac{x_A+x+x_C}{3}\,, \frac{y_A}{3})$

Poiché G_1 e G_2 hanno la medesima ordinata, la retta congiungente è parallela all'asse x, cioè al lato BC

La dimostrazione può essere effettuata anche per via sintetica, applicando la nota proprietà del baricentro di un triangolo

In un triangolo, il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, tali che la parte avente per estremo un vertice è doppia dell'altra.

Osserviamo, quindi, che il triangolo AHE, dove e E è il punto medio di PC e H è il punto medio di BP, è simile al triangolo AG_1G_2 per il secondo criterio di similitudine

Infatti

L'angolo $H\hat{A}E$ è in comune

Le coppie di lati AH e AG_1, AE e AG_2 sono proporzionali , essendo

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG_1}} = \frac{\overline{AG_1} + \frac{\overline{AG_1}}{2}}{\overline{AG_1}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AG_2}} = \frac{\overline{AG_2} + \frac{\overline{AG_2}}{2}}{\overline{AG_2}} = \frac{3}{2}$$

Pertanto, le rette BC e G_1G_2 sono tra loro parallele in quanto, tagliate dalla trasversale AH, o dalla trasversale AE , formano angoli corrispondenti uguali.

OSSERVAZIONE

Essendo uguale a $\frac{3}{2}$ anche il rapporto delle altezze dei due triangoli, rispetto alle rispettive basi HE e G_1G_2, ritroviamo che, nel riferimento cartesiano adottato nella soluzione analitica, la distanza della retta G_1G_2 dall'asse x è $y_A - \frac{2}{3}y_A = \frac{y_A}{3}$.