Quesito 2
Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

Soluzione

La probabilità p che, lanciando un dado regolare , si ottenga la faccia "5" (evento S) è uguale a $\frac{1}{6}$. L'esito contrario $\overline{\mathrm{S}}$ corrisponde all'evento " è stata ottenuta una faccia diversa da 5" ed ha probabilità $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Ripetendo il lancio 8 volte (nelle medesime condizioni) , all'evento S si associa la variabile aleatoria X = (0,1,2,3…., 8) che rappresenta il numero di volte in cui (sulle 8 prove) si verifica S (numero dei "successi").

La probabilità di k successi in n prove (*distribuzione binomiale)* è

$$P(X = k) \ = C_{n,k} p^k q^{n-k}$$

dove $C_{n,k}$ rappresenta il numero delle combinazioni semplici di n elementi , di classe k.

Nel nostro caso il valore dei due parametri è $n = 8$ e $k = 3$

Pertanto

$$P(X = 3) \ = C_{8,3} p^3 q^5 = 56 \frac{5^5}{6^8} \approx 0{,}104 \approx 10\% =$$

Se l'evento S si presenta per la terza volta all'ottavo lancio, significa che si è presentato 2 volte in 7 lanci, con probabilità

$$P(X = 2) \ = C_{7,2} p^2 q^5 = \ 21 \frac{5^5}{6^7}$$

e, poi, nell'ultimo lancio con probabilità $\frac{1}{6}$.

Poiché l'esito dell'ultimo lancio è indipendente da quelli precedenti, la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio è

$$21 \frac{5^5}{6^7} \cdot \frac{1}{6} = 21 \frac{5^5}{6^8} \approx 0.039 \approx 4\%.$$

N.B.
La formula della distribuzione binomiale può essere facilmente dedotta a partire dal concetto di probabilità degli eventi indipendenti o incompatibili e con le principali nozioni di calcolo combinatorio.

Il quesito può essere affrontato e risolto nel caso specifico anche senza possedere il concetto di variabile aleatoria e di distribuzione binomiale

Effettuate 8 prove , i possibili risultati possono essere rappresentati da sequenze di 8 simboli S e $\bar{S}$.
Osserviamo che una sequenza <<favorevole>> all' evento: "S si è realizzato 3 volte", ovvero una sequenza del tipo

$$SSS\ \bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$$

ha probabilità $p^3\ q^5 = \frac{5^5}{6^8}$,ovvero al prodotto delle probabilità di ciascun evento (probabilità composta-eventi indipendenti).
Contiamo ora quante sono le possibili sequenze di questo tipo, supponendo di cambiare di posto i simboli..
Le permutazioni di 8 oggetti con 3 elementi uguali a S e 5 elementi uguali a $\bar{S}$ sono

$$\frac{8!}{3!\,5!} = C_{8,3}$$

Abbiamo , pertanto, $\boldsymbol{C_{8,3} = 56}$ **sequenze, ciascuna con probabilità** $\boldsymbol{\frac{5^5}{6^8}}$ e, poiché le 56 sequenze costituiscono eventi tra loro incompatibili , la probabilità totale che S si verifichi 3 volte (3 successi) in 8 prove è **56**$\frac{5^5}{6^8}$

Se l'evento S si presenta per la terza volta all'ottavo lancio le possibili sequenze sono del tipo

$$SS\ \bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\ S$$

dove l'ultimo elemento non deve essere cambiato di posto, mentre gli altri possono essere permutati in $\boldsymbol{C_{7,2}}$ =$\mathbf{21}$ **modi diversi**.

In questo caso il risultato richiesto è $\mathbf{21}\,\boldsymbol{\frac{5^5}{6^8}}$