Quesito 6
Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per x = 0 e per x = 3, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata

Soluzione

Un polinomio di terzo grado può ammettere

a) 3 zeri reali e distinti
b) 3 zeri reali di cui 2 coincidenti
c) uno zero reale e gli altri due complessi e coniugati

Le condizioni assegnate conducono all'alternativa b, pertanto la funzione polinomiale assume la forma

$f(x) = ax^2(x-3)$ oppure $g(x) = ax(x-3)^2$

$f(x)$ risulta tangente all'asse x nel punto O(0,0)

$g(x)$ risulta tangente all'asse x nel punto $A(3,0)$

Imponendo il passaggio per $P(1,-4)$.si trova

$f(1) = a(-2) = -4 \to a = 2$ per cui $\boldsymbol{f(x) = 2x^2(x-3)}$

$g(1) = a(-2)^2 = -4 \to a = -1$ per cui $\boldsymbol{g(x) = -x(x-3)^2}$

Esistono due funzioni distinte che soddisfano le condizioni assegnate

Studio di $\boldsymbol{f(x)} = 2x^2(x-3)$

Segno --------------------^{0}---------------^{3}++++++++++++++

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Monotonia

$f'(x) = 6x(x-2)$ +++++++++++++^{0}-------------------------^{2}++++++++++++

$f(x)$ $\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

Massimo relativo $O(0,0)$ *Minimo relativo* $(2,-8)$

Studio di $\boldsymbol{g(x)} = -x(x-3)^2$

Segno +++++++++++-^{0}--------------^{3}------------------

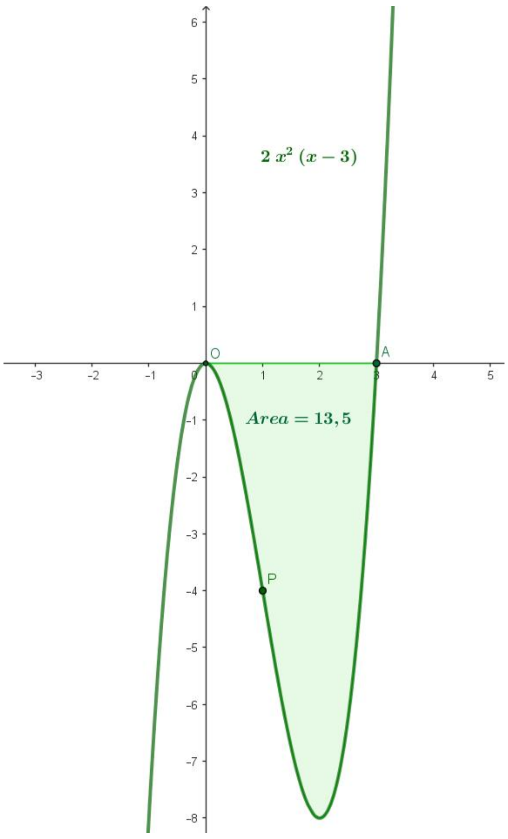
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

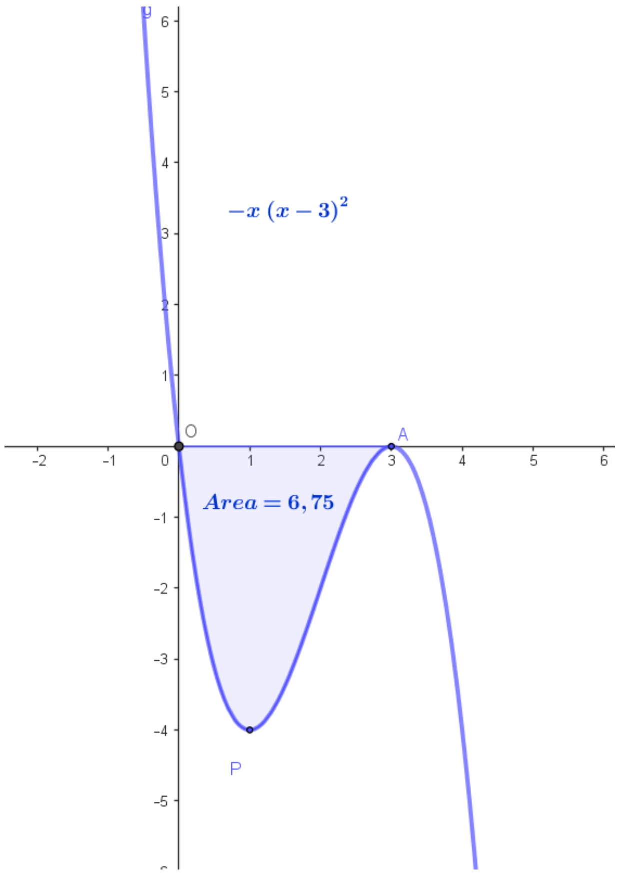
Monotonia

$f'(x) = 3(1-x)(x-3)$ ---------------------^{1}++++++++++++++-^{3}-------------------------

$f(x)$ ↘ ↗ ↘

$Minmo\ relativo\ \ P(1.-4)$ $\qquad$ $Massimo\ relativo\ (3{,}0)$





Calcolo dell'area

$$Area = -\int_0^3 (2x^3 - 6x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{2} + x^3\right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

Calcolo dell'area

$$Area = -\int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 9x)\,dx = -\left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$