Quesito 8

Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b). Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$" e B: "$\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b).

1. $A \Longrightarrow B$
2. $B \Longrightarrow A$
3. $A \Leftrightarrow B$
4. $B \Leftrightarrow A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi

Soluzione

1.**VERA**

L'implicazione logica $A \Longrightarrow B$ equivale a " A è sufficiente per B e B è necessaria per A"

Se A è l'affermazione "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$"e

B è l'affermazione: "$\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$", essendo f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b), $A \Longrightarrow B$ equivale a

"Condizione sufficiente affinché "$\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ " è che f abbia un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$.

Oppure

" Condizione necessaria affinché f abbia un punto di massimo o minimo relativo interno all'intervallo (a, b) è che esista in (a, b) un punto in cui si annulli la derivata prima (punto stazionario) .

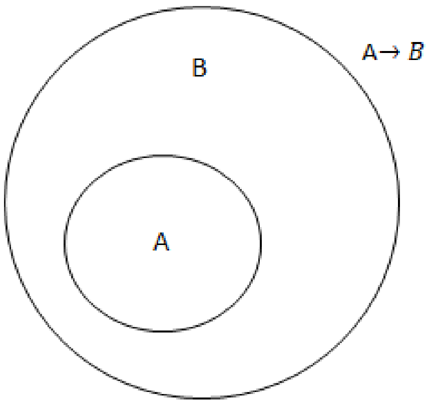
La prima proposizione è vera in quanto è un semplice corollario del Teorema di Fermat sui punti stazionari:

<<Sia f una funzione derivabile in (a.b) e si supponga che x_0 sia un punto di estremo locale di f, se la funzione è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$>>

Nella interpretazione della seconda proposizione diventa la nota regola per cui gli eventuali punti di massimo o minimo locale interni a un intervallo, vanno cercati tra i punti in cui si annulla la derivata prima.

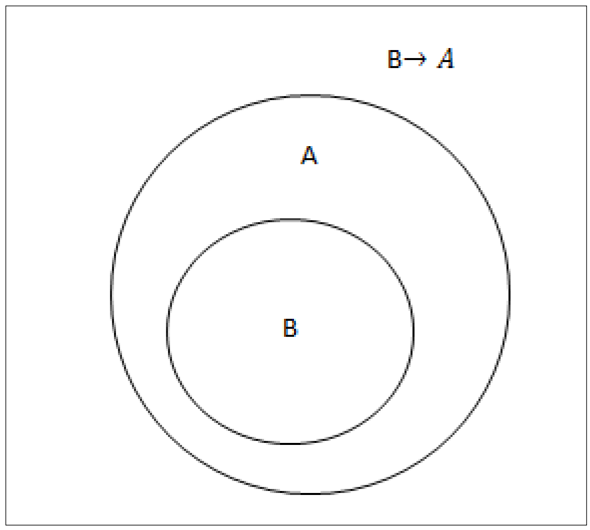
Esempio

$f(x) = x^2 + 1 \quad con\ x \in (-1,1)$ rappresenta un arco di parabola il cui vertice $V(0,1)$ è interno all'intervallo ed è ,per la funzione, punto di minimo assoluto e relativo. Possiamo pertanto affermare che $f'(0) = 0$, come si verifica facilmente.

Interpretazione insiemistica	
	A è l'insieme delle funzioni derivabili che hanno un punto di massimo o minimo locale in (a, b), B è l'insieme delle funzioni che hanno almeno un punto stazionario in (a, b).

2. **FALSA**

La rappresentazione insiemistica della figura a lato non può essere applicata alle due proposizioni in oggetto in quanto l'esistenza di un punto stazionario interno all'intervallo non assicura l'esistenza di un massimo o minimo locale nell'intervallo stesso.



Il punto in cui si annulla la derivata prima potrebbe essere un flesso a tangente orizzontale (ovvero non è necessario che la funzione abbia un estremo locale all'interno dell'intervallo affinché sia presente un punto stazionario)

Controesempio

La funzione $f(x) = x^3 + 1 \ \ con\ x \in (-1,1)$ ammette, all'interno dell'intervallo un punto in cui la derivata prima è nulla (il punto di ascissa 0)
E 'altresì una funzione monotona strettamente crescente, pertanto non ammette estremi relativi all'interno dell'intervallo.
E' facile verificare che $f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 6 > 0$
Pertanto, il punto in cui si annulla la derivata è un flesso a tangente orizzontale

3. e 4. **SONO ENTRAMBE FALSE**

L'implicazione doppia corrisponde alla condizione necessaria e sufficiente.
E' evidente che non si può affermare che " A è condizione necessaria e sufficiente per B", nè che " B è condizione necessaria e sufficiente per A"

Nella rappresentazione insiemistica l'insieme A e l'insieme B dovrebbero coincidere ma , per quanto detto discutendo le altre risposte, ciò non è possibile.