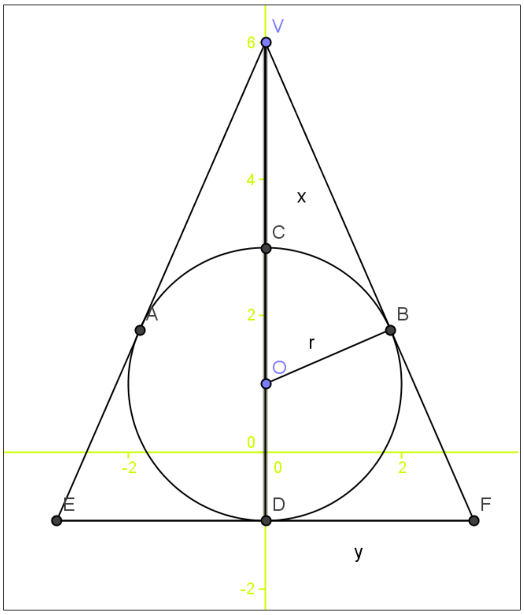
Quesito 4
Una sfera, di raggio *r* fissato, è inscritta nel cono *S* di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

Soluzione

Con riferimento alla figura a lato:
sia O il centro della sfera e D il centro della circonferenza di base del cono, VD la sua altezza.
La retta VD incontra la superficie sferica nel punto D e nel punto C diametralmente opposto, dove è perpendicolare al piano tangente.
Il segmento VC, la cui lunghezza indichiamo con x, è la distanza di V dalla superficie sferica.
Indicando con y il raggio di base del cono, il suo volume sarà



$$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi y^2(x+2r)$$

La similitudine di triamogli VDF e VBO, permette di trovare una relazione tra x, y ed r

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{VB}} \to \frac{y}{x+2r} = \frac{r}{\sqrt{(x+r)^2 - r^2}} \to y = \frac{x+2r}{\sqrt{x(x+2r)}}$$

Possiamo, a questo punto, esprimere il volume del cono in funzione della sola variabile x

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{(x+2r)^2}{x(x+2r)}(x+2r) = \frac{1}{3}\pi\frac{(x+2r)^2}{x}} \quad \textbf{con } \boldsymbol{x > 0}$$

Studio dell'andamento di $\boldsymbol{V(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} V(x) = \lim_{x\to +\infty} V(x) = +\infty$$

$$V'(x) = 0 \to \frac{x^2 - 4r^2}{x^2} = 0 \to x = 2r$$

	0	**2r**	
$V'(x)$	- - - - - - - - - - - - -		+ + + + + + + + + + + +
$V(x)$	↘		↗

Il volume è minimo se $x = 2r$