Quesito 7

Calcolare $\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)e^{2t}dt}{(x-1)^2}$

Soluzione

Il limite del rapporto delle due funzioni si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$
Sia la funzione che sta al numeratore, sia quella che sta al denominatore sono derivabili in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la prima ricordiamo che (applicazione del II teorema fondamentale del calcolo integrale) se f è continua in $\mathbb{R}$, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ con $F'(x) = f(x)$,

Possiamo, pertanto applicare il teorema di $de\ L'H\hat{o}pital$ e passare al limite del rapporto delle due derivate

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)e^{2x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)e^{2x}}{2} = e^2$$

Poiché esiste il limite del rapporto delle derivate possiamo affermare che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)\, e^{2t}dt}{(x-1)^2} = e^2$$